<u>Aufgabe 1:</u> Potenzen

a) Wenn die Zahl 6 beliebig oft mit sich selbst multipliziert wird, dann endet das Ergebnis immer auf eine 6. Gibt es noch mehr Zahlen, die diese Eigenschaft besitzen?

b) Welche Endziffer besitzt die unten stehende Summe? Löse die Aufgabe ohne einen Taschenrechner zu benutzen und beschreibe dein Vorgehen!

$$\left(\left(\left(\left(1^1\right)^2\right)^3\right)^4\right)+\left(\left(\left(\left(2^1\right)^2\right)^3\right)^4\right)+\left(\left(\left(\left(3^1\right)^2\right)^3\right)^4\right)+\left(\left(\left(\left(4^1\right)^2\right)^3\right)^4\right)$$

c) Wir betrachten alle möglichen Potenzen der natürlichen Zahlen. In welchen Fällen endet das Ergebnis einer Potenz immer auf eine 1?

Lösung:

Aufgabe 1.a) Ja, die Zahlen 0, 1 und 5, denn die drei Zahlen ergeben nach beliebiger Multiplikation mit sich selbst immer wieder die Endziffer 0, 1 beziehungsweise 5.

Aufgabe 1.b) Die Endziffer dieser Summe ist 4.

Begründung:

$\left(\left(\left(\left(1^1\right)^2\right)^3\right)^4\right)$ ist immer 1

$\left(\left(\left(\left(2^1\right)^2\right)^3\right)^4\right)$ ist $2^{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 2^{24}$

Potenz 1	=> Endziffer 2
Potenz 2	=> Endziffer 4
Potenz 3	=> Endziffer 8
Potenz 4	=> Endziffer 6
Potenz 5	=> Endziffer 2
Potenz 6	=> Endziffer 4

Die Endziffern 2, 4, 8 und 6 wiederholen sich.

Potenz 24 => Endziffer 6, denn 24 = 6*4

$\left(\left(\left(\left(3^1\right)^2\right)^3\right)^4\right)$ ist $3^{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 3^{24}$

Potenz 1	=> Endziffer 3
Potenz 2	=> Endziffer 9
Potenz 3	=> Endziffer 7
Potenz 4	=> Endziffer 1
Potenz 5	=> Endziffer 3
Potenz 6	=> Endziffer 9

Die Endziffern 3, 9, 7 und 1 wiederholen sich.

Potenz 24 => Endziffer 1, denn 24 = 6* 4

$\left(\left(\left((4^1)^2\right)^3\right)^4\right)$ ist $4^{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 4^{24}$

Potenz 1 => Endziffer 4

Potenz 2 => Endziffer 6

Potenz 3 => Endziffer 4

Potenz 4 => Endziffer 6

Die Endziffern 4 und 6 wiederholen sich.

Potenz 24 => Endziffer 6, denn 24 ist eine gerade Zahl

Werden nun alle vier Endzahlen addiert (1+ 6 + 1+ 6 = 14), dann folgt daraus, dass die Endziffer der Summe 4 ist!

Aufgabe 1.c) Die Endziffer einer Potenz ist immer 1, wenn die Basis ...

- mit 1 endet!

  Basis: $10 \cdot n + 1$ mit n = 0, 1, 2, 3, …

  Potenz: $(10 \cdot n + 1)^x$ mit n = 0, 1, 2, 3, … und x = 0, 1, 2, 3, …

  Beispiele: n = 0: $1^0 = 1$, $1^1 = 1$, $1^2 = 1$, $1^3 = 1$, …

  n = 1: $11^0 = 1$, $11^1 = 11$, $11^2 = 121$, $11^3 = 1.331$, …

- mit 3 endet, aber nur unter der Bedingung, dass der Exponent ein Vielfaches von 4 ist (siehe Aufgabenteil b)).

  Potenz: $(10 \cdot n + 3)^{4\cdot x}$ mit n = 0, 1, 2, 3, … und x = 0, 1, 2, 3, …

  Beispiele: n= 0: $3^{4\bullet 0} = 3^0 = 1$, $3^{4\bullet 1} = 3^4 = 81$, $3^{4\bullet 2} = 3^8 = 6.561$,...

  n= 1: $13^0 = 1$, $13^4 = 28.561$, $13^8 = 815.730.721$

  Begründung: siehe Aufgabenteil b)

- mit 7 endet, aber wieder unter der Bedingung, dass der Exponent ein Vielfaches von 4 ist.

  Potenz: $(10 \cdot n + 7)^{4x}$ mit n = 0,1 ,2 ,3, … und x= 0, 1, 2, 3, …

  Beispiele: n = 0: $7^0 = 1$, $7^4 = 2.401$, $7^8 = 5.764.801$,...

  n = 1: $17^0 = 1$, $17^4 = 83.521$, $17^8 = 6.975.757.441$,...

- mit 9 endet, aber nur unter der Bedingung, dass der Exponent gerade ist.

  Potenz: $(10 \cdot n + 9)^{2x}$ mit n = 0, 1, 2, 3, … und x = 0,1 ,2, 3, …

  Beispiele: n = 0: $9^0 = 1$, $9^2 = 81$, $9^4 = 6.561$, $9^6 = 531.441$...

  n = 1: $19^0 = 1$, $19^2 = 361$, $19^4 = 130.321$...

<u>Aufgabe 2:</u> Potenzgesetze

a) Stelle die Zahl 16 durch mindestens fünf Potenzrechenoperationen dar!

b) Wie kannst du aus den Termen a^2, a^3, a^5, b^3, b^5, 3 und 7 durch Multiplikation und/oder Division den angegebenen Term erhalten?

$$\frac{63 \cdot a^6}{b^4}$$

c) Berechne den dargestellten Kettenbruch!

$$2+\frac{2}{2^2-\frac{2\cdot 2^2}{2^3-\frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3}{2^4-\frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4}{2^5}}}}$$

Welche Strategie hast du zur Lösung dieser Aufgabe verwendet?

Lösung:

Aufgabe 2.a)

1) 16^1	2) 4²	3) (-4)²	4) 4 × 2²
5) $4\cdot(-2)^2$	6) $2^2\cdot 2^2$	7) $2\cdot 2^3$	8) $(-2)^2\cdot(-2)^2$
9) 2^4	10) $\frac{2^5}{2}$	11) $\frac{2^6}{2^2}$	12) $\frac{2^5\cdot 2^8}{2^4\cdot 2^5}$
13) $\frac{3\cdot 2^5}{6}$	14) $2^{-6}\cdot 2^{10}$	15) $2^{-1}\cdot 2^5$ ...	

Aufgabe 2.b) $\frac{3\cdot 3\cdot 7\cdot a^5\cdot a^3\cdot b^3\cdot b^3}{a^2\cdot b^5\cdot b^5}=\frac{63\cdot a^8\cdot b^6}{a^2\cdot b^{10}}=\frac{63\cdot a^6}{b^4}$

Aufgabe 2.c) verwendete Strategie: Rückwärtsarbeiten

Durch Kürzen und Anwenden der Potenzgesetze folgt:

$$2+\frac{2}{2^2-\frac{2\cdot 2^2}{2^3-\frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3}{2^4-\frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4}{2^5}}}}=2+\frac{2}{2^2-\frac{2\cdot 2^2}{2^3-\frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3}{2^4-2^5}}}=2+\frac{2}{2^2-\frac{2\cdot 2^2}{2^3-\frac{2\cdot 2^2\cdot 2^3}{2^4(1-2)}}}$$

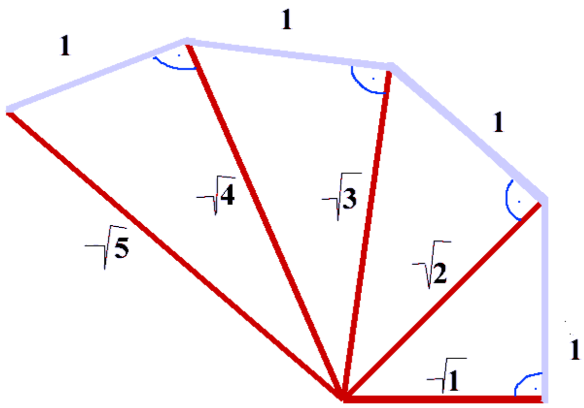
$$=2+\frac{2}{2^2-\frac{2\cdot 2^2}{2^3+2^2}}=2+\frac{2}{2^2-\frac{2\cdot 2^2}{2^2(1+2)}}=2+\frac{2}{2^2-\frac{2}{3}}=2+\frac{2}{\frac{10}{3}}=2+\frac{6}{10}=2\frac{3}{5}$$

<u>Aufgabe 3:</u> Wurzelschnecke

a) Welche Zahl passt nicht in die folgende Zahlenreihe? Begründe deine Antwort!

121 64 1 49 14 144 16 36

b) Die nebenstehende Zeichnung zeigt die so genannte Wurzelschnecke/ Wurzelspirale. Zeichne die Wurzelschnecke in dein Heft und beschreibe ihre Konstruktion!
Wo treten Spiralen in der Natur, in der Technik, im Alltag und/oder in der Kunst auf?



c) Mit Hilfe des Heron-Verfahrens können näherungsweise Wurzeln berechnet werden. Berechne $\sqrt{19}$ in vier Iterationsschritten und erläutere die geometrische Interpretation des Heron-Verfahrens! Vergleiche am Ende dein Ergebnis mit der Taschenrechnerlösung! Was stellst du fest?

Hilfe: Heron-Formel: $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \dfrac{a}{a_n}}{2}$

d) Berechne den folgenden Wurzelterm, ohne einen Taschenrechner zu verwenden!

$$\sqrt[2]{36\cdot\sqrt[3]{16\cdot\sqrt[4]{128\cdot\sqrt[5]{16\cdot\sqrt[6]{32\cdot\sqrt[7]{64\cdot\sqrt[8]{256}}}}}}}$$

Lösung:

Aufgabe 3.a) Alle Zahlen, außer der Zahl 14, lassen sich als Produkt zweier gleicher Zahlen schreiben oder alle Zahlen, außer der Zahl 14, besitzen eine natürliche zweite Wurzel.

Aufgabe 3.b) Konstruktionsbeschreibung: Die Wurzelspirale wird durch das Aneinanderreihen rechtwinkliger Dreiecke konstruiert. Dabei ist die Hypotenuse des vorherigen Dreieckes die Ankathete des nachfolgenden. Die Gegenkathete ist immer gleich 1.
Vorkommen von Spiralen in der Natur, im Alltag, in der Technik und/ oder in der Kunst:

- Schneckengehäuse
- Pflanzen (Samenkapseln, Ranken und Blätter können spiralförmig angeordnet sein: Bsp.: Sonnenblume)
- Elefanten winden ihren Rüssel spiralförmig
- Spinnen bauen ihr Nest spiralförmig
- Nabelschnur eines Neugeborenen
- Haarwirbel
- der Fingerabdruck enthält spiralförmige Muster

- die Schnecke im Innenohr ist spiralförmig
- Wasserstrudel
- Ablaufstrudel der Badewanne
- Luftströmungen um ein Tiefdruckgebiet

Aufgabe 3.c) Heron-Formel: $a_{n+1} = \dfrac{a_n + \dfrac{a}{a_n}}{2}$

Mit $a = 19$ und $a_1 = 4$ folgt:

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = \frac{4 + \frac{19}{4}}{2} = 4{,}375$$

$$a_3 = \frac{4{,}375 + \frac{19}{4{,}375}}{2} = 4{,}3589$$

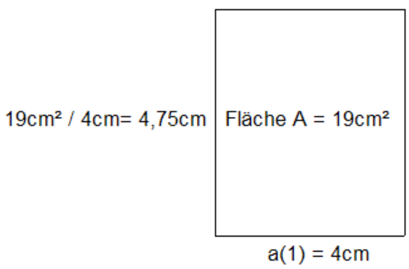
$$a_4 = \frac{4{,}3589 + \frac{19}{4{,}3589}}{2} = 4{,}3589$$

Das Ergebnis mit Hilfe des Heron-Verfahrens ist gleich dem Ergebnis mit Hilfe des Taschenrechners. Das Näherungsverfahren ist demnach sehr genau.

geometrische Interpretation:

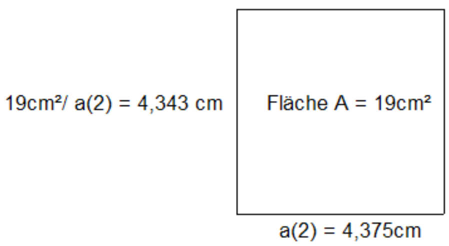
Die Formel des Heron-Verfahrens entspricht dem arithmetischen Mittel zweier Rechtecksseiten.

=> Verwandeln eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat!



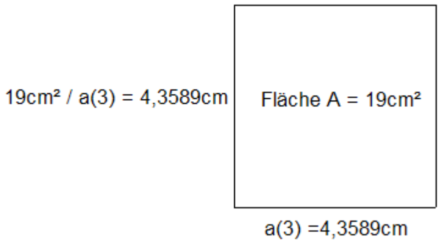
Die beiden Rechtecksseiten werden nun arithmetisch gemittelt.

=> eine neue Rechtecksseite a(2)



Die beiden Rechtecksseiten werden nun wieder arithmetisch gemittelt.

=> eine neue Rechtecksseite a(3)



Nun haben wir ein Quadrat und sind fertig!

Aufgabe 3.d)

$$\sqrt[2]{36\cdot\sqrt[3]{16\cdot\sqrt[4]{128\cdot\sqrt[5]{16\cdot\sqrt[6]{32\cdot\sqrt[7]{64\cdot\sqrt[8]{256}}}}}}}$$

$$=\sqrt[2]{36\cdot\sqrt[3]{16\cdot\sqrt[4]{128\cdot\sqrt[5]{16\cdot\sqrt[6]{32\cdot\sqrt[7]{64\cdot 2}}}}}}$$

$$=\sqrt[2]{36\cdot\sqrt[3]{16\cdot\sqrt[4]{128\cdot\sqrt[5]{16\cdot\sqrt[6]{32\cdot 2}}}}}$$

$$=\sqrt[2]{36\cdot\sqrt[3]{16\cdot\sqrt[4]{128\cdot\sqrt[5]{16\cdot 2}}}}$$

$$=\sqrt[2]{36\cdot\sqrt[3]{16\cdot\sqrt[4]{128\cdot 2}}}$$

$$=\sqrt[2]{36\cdot\sqrt[3]{16\cdot 4}}$$

$$=\sqrt[2]{36\cdot 4}=12$$