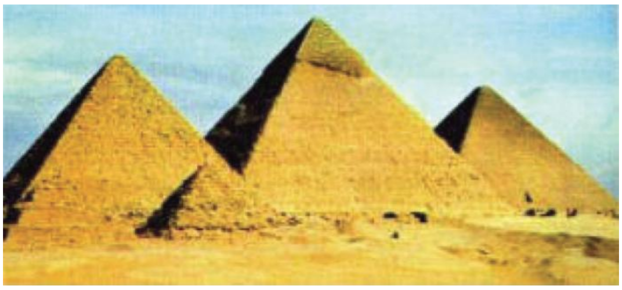
Aufgabe 1: **Die Pyramiden von Gizeh**

Nach der so genannten Frühzeit (2850 - 2600 v. Chr.) setzte gleich als erster kultureller Höhepunkt der Bau der großen Pyramiden, welches Grabmäler der altägyptischen Könige (Pharaonen) sind, ein.



Am bekanntesten sind die rechts abgebildeten Pyramiden von Gizeh, die zu den sieben Weltwundern zählen. Beigesetzt sind hier die Könige Cheops, Chefren und Mykerinus.

Die größte, interessanteste und auch geheimnisvollste davon ist die Cheops-Pyramide (siehe Abbildung rechts), die um 2530 v. Chr. von König Cheops, einem der größten Pharaonen der 4. Dynastie, auf dem Kalkplateau von Gizeh, in der Nähe des heutigen Kairo, erbaut wurde. Stehst du neben ihr, dann kommst du dir wie eine Ameise vor einem Ameisenhaufen vor und wenn du um sie herum läufst, musst du ungefähr einen Weg von 921 Meter zurücklegen. Ihre Grundfläche ist so groß wie neun Fußballfelder und ihre einstige Höhe betrug 146,6 Meter. Heute sind das jedoch rund 10 Meter weniger, da in den letzten Jahrhunderten viele Steine verwittert sind oder für den Bau von Palästen und Moscheen gestohlen wurden.

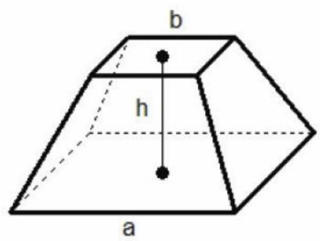
a) Welches Volumen besaß die Cheops-Pyramide ursprünglich? Fertige hierzu eine maßstabsgetreue Schrägbildzeichnung an!

b) Welches Volumen besitzt die Cheops- Pyramide heute? Um wie viel Prozent hat das Volumen durch die Verwitterung und Räubereien abgenommen?

c) Betrachte den nebenstehenden Pyramidenstumpf.

   Wie kann ein Pyramidenstumpf mit zwei quadratischen Grundflächen in dir bekannte Teilkörper zerlegt werden? Skizziere die entstanden Teilkörper einzeln als Schrägbild!

   Kannst du nun eine allgemeine Formel für die Volumenberechnung dieses Pyramidenstumpfes in Abhängigkeit der beiden Grundseiten a und b und der Höhe h angeben?



Lösung zu Aufgabe 1a)

$U = 921\text{m} = 4a \Rightarrow a = 230{,}25\text{m}$

$H = 146{,}6\text{m}$

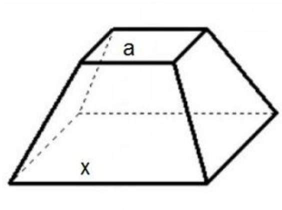
$$V_{\text{früher}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot H = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot (230{,}25\ \text{m})^2 \cdot 146{,}6\ \text{m} = 2.590.669{,}3875\ \text{m}^3 \approx 2.590.669\ \text{m}^3$$

Das Volumen der Cheops-Pyramide betrug früher etwa 2.590.669 m³.

Lösung zu Aufgabe 1b)

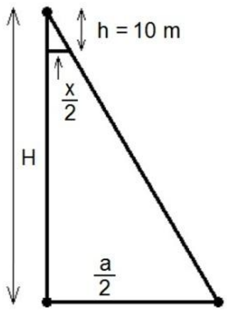
Version 1:

Wir nehmen (vereinfachend) an, dass es sich bei der heutigen Cheops-Pyramide nur noch um einen „Pyramidenstumpf" handelt. In der Lösung zu 1a) haben wir bereits das Volumen der ursprünglichen Pyramide berechnet. Subtrahieren wir nun das Volumen der 10 m hohen „abgetragenen" Pyramidenspitze vom ursprünglichen Volumen, so erhalten wir das gesuchte Volumen des Stumpfes.



Mit Hilfe des Strahlensatzes kann die zunächst nicht bekannte Grundseite x der kleinen Pyramide berechnet werden:

$$\frac{\frac{x}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{10}{H} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{10}{H} \Rightarrow x = \frac{10a}{H} = \frac{10 \cdot 230{,}25}{146{,}6} \approx 15{,}706$$ (alle Angaben in Meter)



Mit Hilfe der Grundseite x und der Höhe h = 10 m lässt nun das Volumen der kleinen „abgetragenen" Pyramide berechnen:

$$V_{\text{abgetragen}} = \frac{x^2 \cdot h}{3} = \frac{(15{,}706\ \text{m})^2 \cdot 10\text{m}}{3} \approx 822\ \text{m}^3$$

$$V_{\text{heute}} = V_{\text{früher}} - V_{\text{abgetragen}} \approx 2.590.669\ \text{m}^3 - 822\ \text{m}^3 = 2.589.847\ \text{m}^3$$

Die Cheops-Pyramide besitzt heute noch ein Volumen von etwa 2.589.847 m³.

Der Volumenverlust lässt sich auch als Anteil des früheren Volumens berechnen:

$$\frac{V_{\text{abgetragen}}}{V_{\text{früher}}} = \frac{822\ \text{m}^3}{2.590.669\ \text{m}^3} \approx 0{,}000317 = 0{,}0317\%$$

Das Volumen der Cheops-Pyramide hat um etwa 0,0317% abgenommen.

Version 2a:

Eine mathematisch interessantere Lösung ist die Betrachtung der Differenz der Pyramidenvolumina, denn durch geschicktes Umstellen ist dann der abgetragene Anteil direkt erkennbar:

$$V_{\text{heute}} = V_{\text{früher}} - V_{\text{abgetragen}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 10$$

$$= \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{10a}{H}\right)^2 \cdot 10 = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \left(H - \frac{1000}{H^2}\right) = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H \cdot \left(1 - \frac{1000}{H^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{H}\right)^3\right) = V_{\text{früher}} \cdot \left(1 - \left(\frac{10}{H}\right)^3\right)$$

Der Faktor $\left(1-\left(\frac{10}{\mathrm{H}}\right)^3\right)$ in der letzten Zeile stellt den heute noch übrig gebliebenen Anteil des ursprünglichen Pyramidenvolumens dar. Der Term $\left(\frac{10}{\mathrm{H}}\right)^3$ allein ist der Anteil des abgetragenen Volumens.

Setzt man H=146,6 m ein, erhält man die gleichen Ergebnisse für den heute noch vorhandenen Anteil bzw. das heutige Volumen wie bei Version 1.

Der Quotient $\frac{10}{H}$ stellt dabei den „Streckfaktor“ dar, mit dem aus der großen Pyramide die kleinere Pyramide erzeugt wurde („Verkleinerung“, da $\frac{10}{H} < 1$). Die dritte Potenz des Streckfaktors ist also direkt der Anteil des Volumens der kleinen Pyramide vom ursprünglichen Pyramidenvolumen.

Version 2b:

Dass dies allgemeingültig für einen quadratischen Pyramidenstumpf ist, kann man mit einem allgemeinen Ansatz mit der Höhe h und dem Ausdruck $\mathrm{x}=\frac{\mathrm{h}\cdot\mathrm{a}}{\mathrm{H}}$ für die Grundseite der „abgetragenen“ Pyramidenspitze zeigen:

$$\mathrm{V_{heute}} = \mathrm{V_{früher}} - \mathrm{V_{abgetragen}} = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{a}^2\cdot \mathrm{H} - \frac{1}{3}\cdot \mathrm{x}^2\cdot \mathrm{h}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \mathrm{a}^2\cdot \mathrm{H} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\mathrm{h}\cdot\mathrm{a}}{\mathrm{H}}\right)^2\cdot \mathrm{h} = \frac{1}{3}\cdot \mathrm{a}^2\cdot\left(\mathrm{H}-\frac{\mathrm{h}^3}{\mathrm{H}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot \mathrm{a}^2\cdot \mathrm{H}\cdot\left(1-\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{H}}\right)^3\right) = \mathrm{V_{früher}}\cdot\left(1-\left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{H}}\right)^3\right)$$

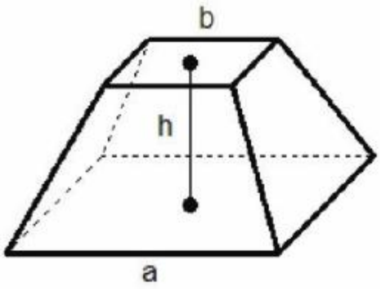
An dieser Formel kann man zum Beispiel sofort ablesen, dass das Volumen eines Pyramidenstumpfs, der nur noch die halbe Höhe wie die vollständige Pyramide hat, immer noch $1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$ des Volumens der Pyramide beträgt.

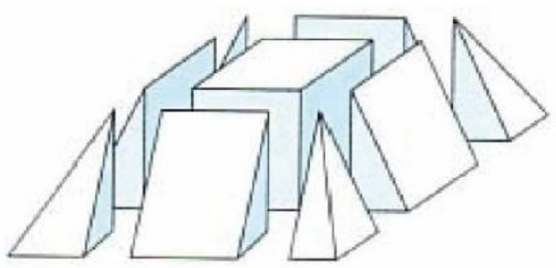
Auch bei dieser Version ergibt sich nach Einsetzen der gegebenen Größen das gleiche Ergebnis:

Das Volumen der Cheops-Pyramide ist heute noch zu etwa 99,97% erhalten und etwa 0,03% von ihr wurde durch Verwitterung und Räubereien abgetragen.

Lösung zu Aufgabe 1c)

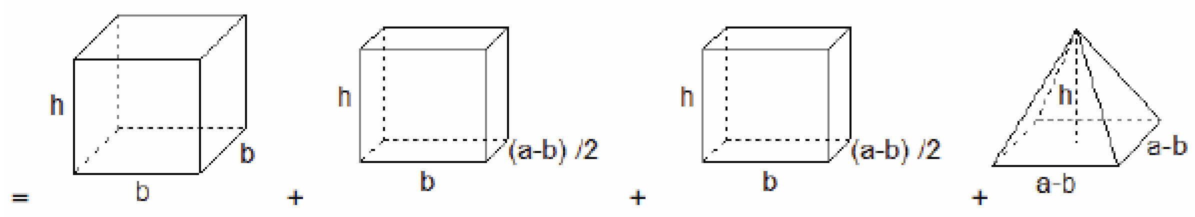
Ein Pyramidenstumpf kann wie folgt in bekannte Teile zerlegt werden:





$$\boldsymbol{V} = \mathbf{V}_{\text{QuaderMitte}} + \mathbf{V}_{QuaderAußen} + \mathbf{V}_{PyramideEckteile}$$

Berechnung des Pyramidenstumpfes mit neuer Zusammensetzung:



Allgemeine Formel für die Volumenberechnung dieses Pyramidenstumpfes:

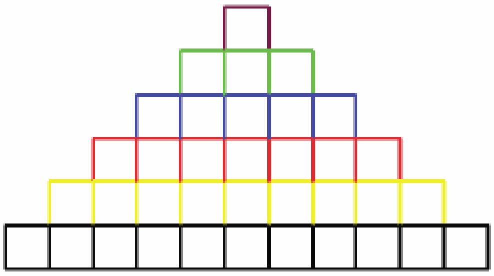
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V} &= \mathbf{V}_{\text{QuaderMitte}} + \mathbf{V}_{QuaderAußen} + \mathbf{V}_{PyramideEckteile} \\
&= b^2 \cdot h + 2 \cdot \frac{a-b}{2} \cdot b \cdot h + \frac{1}{3} \cdot (a-b)^2 \cdot h \\
&= b^2 \cdot h + a \cdot b \cdot h - b^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) \cdot h \\
&= b^2 \cdot h + a \cdot b \cdot h - b^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot\ a^2 \cdot h - \frac{2}{3} \cdot a \cdot b \cdot h + \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h \\
&= \frac{1}{3} b^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h \\
&= \frac{1}{3} h \cdot \left(b^2 + \sqrt{a^2 \cdot b^2} + a^2\right) \\
&= \frac{1}{3} h \cdot \left(G_{klein} + \sqrt{G_{groß} \cdot G_{klein}} + G_{groß}\right)
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen $G_{groß}$ die untere, große, quadratische Fläche und G_{klein} die obere, kleine, quadratische Fläche des Pyramidenstumpfs.

Aufgabe 2: **Stufenpyramide**

Die „Schule auf der Aue“ möchte auf ihrem Pausenhof eine Sitzgelegenheit für ihre Schüler/innen schaffen. Diese soll möglichst wenig Platz des Pausenhofs in Anspruch nehmen, jedoch möglichst viele Sitzplätze für alle bereitstellen.

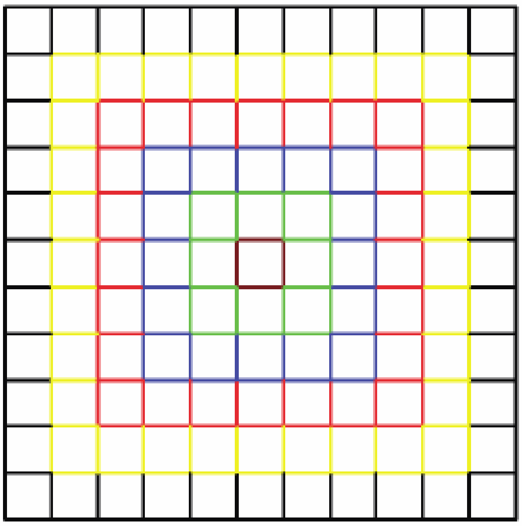
Der Architekt Herr Ludwig, der durch die Besichtigung der Pyramiden von Gizeh in seinem Ägypten-Urlaub inspiriert wurde, rät der Schule den Bau einer quadratischen Stufenpyramide aus Leichtbeton.



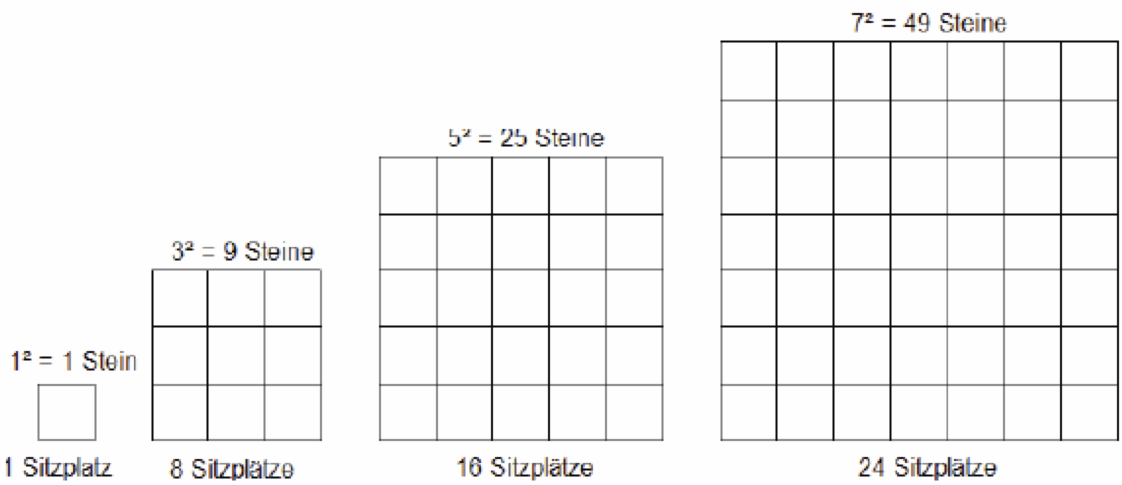
a) Wie viele Steine werden für das Stapeln einer sechsstufigen Pyramide benötigt? Und wie viele Schüler/innen können mindestens auf ihr sitzen? Hinweis: Ein Stein soll einem Sitzplatz entsprechen.
b) Welche Maße sollte ein Steinquader besitzen, damit ein Mensch darauf bequem sitzen kann?
c) Ein m³ Leichtbeton kostet 97,80 €. Mit welchen Materialkosten muss die Schule bei dem Bau der Pyramide rechnen?

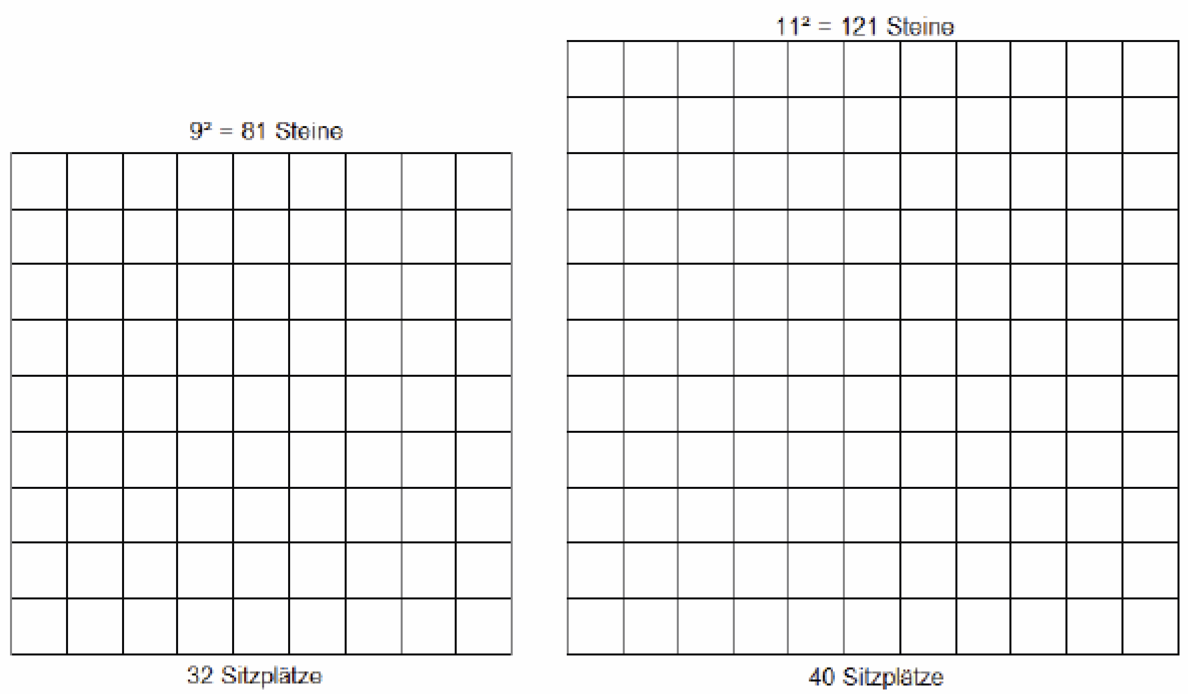
Lösung:

Der Grundriss einer sechsstufigen Pyramide:



Die einzelnen Steinschichten einer sechsstufigen Pyramide:





Lösung zu Aufgabe 2a)

Die sechsstufige Pyramide besitzt

1+ 9 + 25+ 49 + 81 + 121 = 286 Steine.

Auf ihr können mindestens

1 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 = 121 Menschen sitzen.

Lösung zu Aufgabe 2b)

Eine mögliche Lösungsvariante ist die Folgende: Ein Steinquader besitzt eine Grundfläche von 0,36 m² (a = 0,6 m) und eine Höhe von 40 cm.

Begründung: Auf der Sitzfläche sollte sowohl Platz zum Sitzen als auch für die Füße des Sitzenden darüber sein. Daraus folgt, dass der Stein mindestens 60 cm breit sein sollte.

Lösung zu Aufgabe 2c)

Die folgenden Werte sind nicht absolut, sondern hängen von den angenommenen Werten der vorigen Teilaufgabe ab. In diesem Fall ergibt sich:

Ein Stein besitzt ein Volumen von $V_{Stein} = a^2 \cdot h = 0{,}144\ m^3$.

Das Gesamtvolumen der 286 Steine beträgt $V = 286 \cdot V_{Stein} = 41{,}184 m^3$.

Die Materialkosten betragen somit $K = 41{,}184 m^3 \cdot 97{,}80€ = 4.027{,}80€$.

Die berechneten Werte können abweichen, da die Lösung von den Annahmen aus b) abhängt.

<u>Aufgabe 3:</u> Ferrero Küsschen

Zu Weihnachten soll eine Sonderverpackung für Ferrero Küsschen angefertigt werden. Diese soll die Form einer Pyramide besitzen und zwischen 30 und 40 Ferrero Küsschen beinhalten. Welche Maße könnte diese Verpackung besitzen? Argumentiere sinnvoll! Erarbeite jedoch zunächst Fragen, die sich bei der obigen Problemstellung ergeben können!

Zusatz: Diskutiere die Vor- und Nachteile der Sonderverpackung im Vergleich zur herkömmlichen Verpackung (Prisma mit einer sechseckigen Grundfläche und 28 Ferrero Küsschen)!

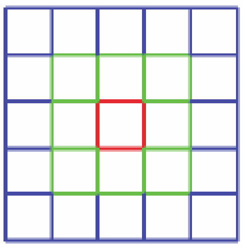
Lösung:

Bei Verpackungsproblemen sind folgende Fragen interessant:

- Welche Form soll die Verpackung haben? (Hier vorgegeben: Pyramide)
- Wie viel Gramm Schokolade bzw. wie viele Ferrero Küsschen soll die Verpackung enthalten? (Hier vorgegeben: Zwischen 30 und 40 Ferrero Küsschen)

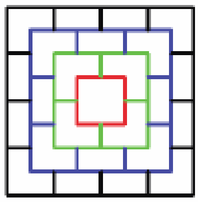
Weitere Fragen für dieses Problem sind:

- Welche Maße besitzt ein Ferrero Küsschen? (h~ 1,5cm und b~ 2,5cm)
- Wie sollen die Ferrero Küsschen in der Verpackung angeordnet werden? (Zwei geeignete Anordnungen sind die Folgenden!)



Pyramide 1 (Draufsicht)

oder



Pyramide 2 (Draufsicht)

1 + 9 + 25 = 35 Ferrero Küsschen

größere Grundfläche als Pyramide 2

niedrigere Höhe als Pyramide 2

1 + 4 + 9 + 16 = 30 Ferrero Küsschen

kleinere Grundfläche als Pyramide 1

höhere Höhe als Pyramide 1

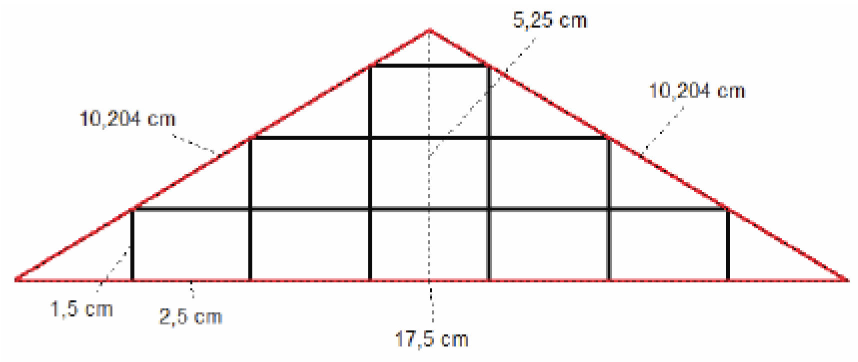
- Welche der beiden Anordnungen ist sinnvoller? Begründe!
- Und welche Maße folgen dann für die Verpackungspyramide?

Pyramide 1:

Höhe der Verpackung = 5,25 cm

Breite der Verpackung = 17,5 cm

Um die Oberfläche der Pyramide 1 berechnen zu können, müssen wir zunächst die Höhe der Dreiecke mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen!



$$h_{Dreieck}{}^2 = h_{Pyramide}{}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (5{,}25cm)^2 + \left(\frac{17{,}5cm}{2}\right)^2 = 104{,}125cm^2$$

$$h_{Dreieck} = \sqrt{104{,}125cm^2} = 10{,}2cm$$

$$O_{Pyramide\ 1} = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_{Dreieck} = (17{,}5cm)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 17{,}5cm \cdot 10{,}2cm = 663{,}25cm^2$$

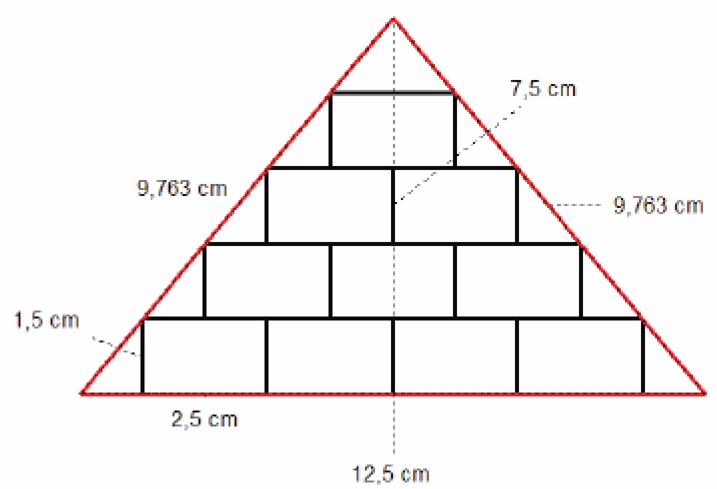
$$V_{Pyramide\ 1} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (17{,}5cm)^2 \cdot 5{,}25cm = 535{,}94cm^3$$

Pyramide 2:

Höhe der Verpackung: $h_{Pyramide}$ = 7,5 cm

Breite der Verpackung: b = 12,5 cm

Auch bei Pyramide 2 müssen wir, bevor wir die Oberfläche berechnen können, zunächst die Höhe der Dreiecke, aus denen die Oberfläche besteht, mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen!



$$h_{Dreieck}{}^2 = h_{Pyramide}{}^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (7{,}5cm)^2 + \left(\frac{12{,}5cm}{2}\right)^2 = 95{,}31cm^2$$

$$h_{Dreieck} = \sqrt{95{,}31cm^2} = 9{,}76cm$$

$$O_{Pyramide\ 2} = b^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_{Dreieck} = (12{,}5cm)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12{,}5cm \cdot 9{,}76cm = 400{,}25cm^2$$

$$V_{Pyramide\ 2} = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (12{,}5cm)^2 \cdot 7{,}5cm = 390{,}63cm^3$$

Pyramide 2 ist die sinnvollere Verpackung, da sie einen geringeren Materialverbrauch[1] aufweist $(O_{Pyramide\ 2} < O_{Pyramide\ 1})$, die Verpackung das kleinere Volumen[2] besitzt $V_{Pyramide\ 2} < V_{Pyramide\ 1}$ und sie zudem optisch ansprechender ist!

Zusatz:

Analoges Vorgehen wie oben! (28 Ferrero Küsschen in zwei Schichten) Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen der herkömmlichen Verpackung. Tipp: Zerlege die Grundfläche des Prismas in sechs gleichschenklige Dreiecke.

Vergleiche und interpretiere abschließend deine Ergebnisse mit der Oberfläche und dem Volumen der Pyramide 2!

[1] Je geringer der Materialverbrauch einer Verpackung ist, desto kostengünstiger ist es, sie zu produzieren.

[2] Je kleiner das Verpackungsvolumen einer Verpackung ist, desto kostengünstiger ist es, sie zu transportieren, da mehr Verpackungen in einer Fracht befördert werden können.