<u>Aufgabe 1:</u> Lösungsmengen

Welche Lösungsmengen besitzen die folgenden Gleichungen? Welche Möglichkeiten kennst du, solche Aufgaben zu lösen?

a) $5^{x+1} = 125$

b) $3^{2x+3} + 8 = x^2 + 3x - 7$

c) $\dfrac{\log_{13}(\sqrt[4]{5x^2 - 4x + 6})}{\log_{13}(x^2 + 2x + 6)} = \dfrac{1}{4}$

Lösung:

a) Gleichung: $5^{x+1} = 125$

Variante 1: „algebraisch“

$$5^{x+1} = 125$$
$$\ln(5^{x+1}) = \ln 125$$
$$x + 1 = \frac{\ln 125}{\ln 5} = 3$$
$$\Rightarrow x = 2$$

Variante 2: „tabellarisch“

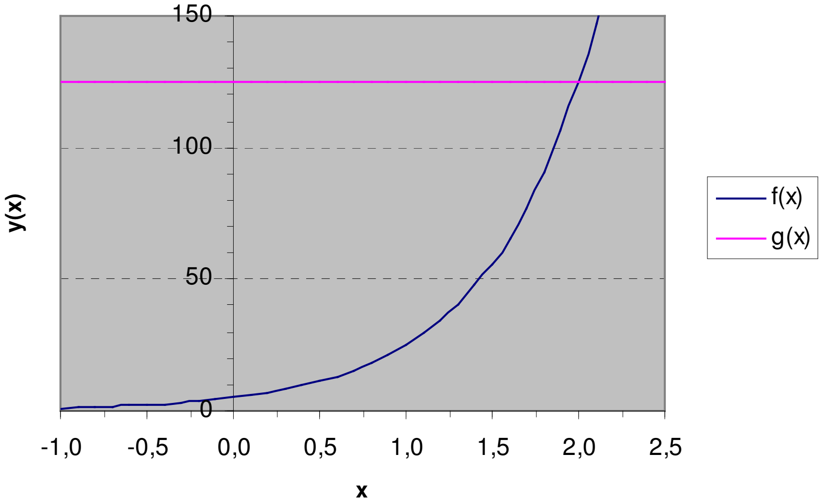
x	**f(x) =5 $^{x+1}$**	**g(x) = 125**	**Bemerkung**
0	5	125	
1	25	125	
2	125	125	Schnittpunkt der beiden Funktionen

$\Rightarrow x = 2$ ist die Lösung.

Variante 3: „graphisch“

Der Schnittpunkt der beiden Funktionen liegt bei x = 2 und y = 125.

$\Rightarrow x = 2$ ist die Lösung.



b) Gleichung : $3^{2x+3}+8=x^2+3x-7$

Variante 1: „algebraisch“

$$3^{x^2+5x-7}+8=18$$

$$3^{x^2+5x-7}=10$$

$$\ln(3^{x^2+5x-7})=\ln 10$$

$$(x^2+5x-7)\ln 3=\ln 10$$

$$x^2+5x-7=\frac{\ln 10}{\ln 3}=2{,}1$$

$$x^2+5x-9{,}1=0$$

$$x_{1/2}=-2{,}5\pm\sqrt{2{,}5^2+9{,}1}=-2{,}5\pm 3{,}92$$

$$x_1=1{,}42$$

$$x_2=-6{,}42$$

Variante 2: „tabellarisch“

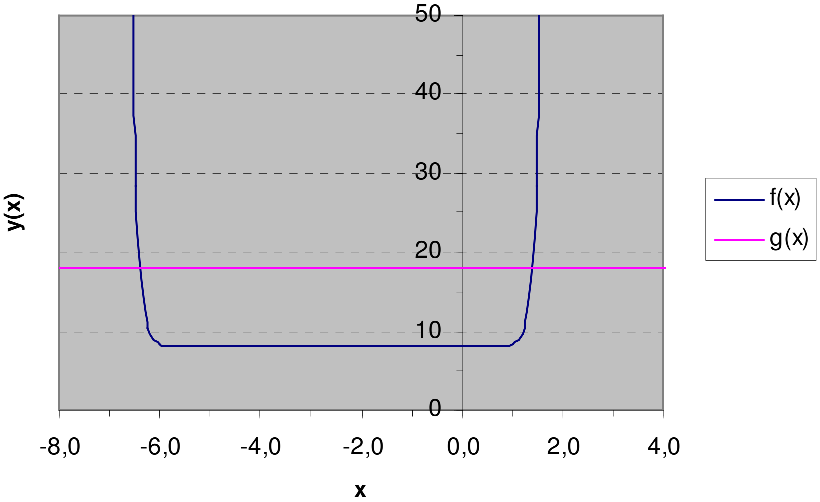
x	f(x) = 3^{x^2+5x-7}+8	g(x) =18	Bemerkung
0	8,0005	18	
0,5	8,009	18	
1	8,33	18	
1,5	28,52	18	zwischen 1 und 1,5 ist ein Schnittpunkt
1,4	16,61	18	zwischen 1,4 und 1,5 ist der Schnittpunkt
1,41	17,38	18	
1,42	**18,23**	**18**	**1.Schnittpunkt**
-3	8	18	
-4	8	18	
-5	8	18	
-6	8,33	18	
-7	2195	18	zwischen -7 und -6 ist ein Schnittpunkt
-6,5	28,51	18	
-6,4	16,61	18	zwischen -6,5 und -6,4 ist der Schnittpunkt
-6,41	17,38	18	
-6,42	**18,23**	**18**	**2.Schnittpunkt**

=> Die beiden Lösungen sind $x_1\approx 1{,}42$ und $x_2\approx -6{,}42$.

Variante 3: „graphisch“

$f(x)=5^{x+1}$

$g(x)=125$



Durch Ablesen der Schnittpunkte erhalten wir die beiden Lösungen

$x_1 \approx -6{,}4$ und $x_2 \approx 1{,}4$.

c) Gleichung: $\dfrac{\log_{13}(\sqrt[4]{5x^2-4x+6})}{\log_{13}(x^2+2x+6)}=\dfrac{1}{4}$

Variante 1: „algebraisch“

$$\frac{\log_{13}(\sqrt[4]{5x^2-4x+6})}{\log_{13}(x^2+2x+6)}=\frac{\log_{13}(5x^2-4x+6)^{\frac{1}{4}}}{\log_{13}(x^2+2x+6)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot\log_{13}(5x^2-4x+6)}{\log_{13}(x^2+2x+6)}=\frac{1}{4}$$

$$\frac{\log_{13}(5x^2-4x+6)}{\log_{13}(x^2+2x+6)}=1$$

$$\log_{13}(5x^2-4x+6)=\log_{13}(x^2+2x+6)$$

$$5x^2-4x+6=x^2+2x+6$$

$$4x^2-6x=0$$

$$x^2-\frac{3}{2}x=0$$

$$x_{1/2}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}} \qquad \Rightarrow \qquad x_1=1\frac{1}{2} \quad , \quad x_2=0$$

Variante 2: „tabellarisch“

Die Termumformungen sind äquivalent zu Variante 1.

$$5x^2 - 4x + 6 = x^2 + 2x + 6$$

x	f(x)= x² +2x+6	g(x)= 5x²-4x +6	Bemerkung
0	**6**	**6**	**1.Schnittpunkt**
0,5	7,25	-0,75	
1	9	7	
1,5	**11,25**	**11,25**	**2. Schnittpunkt**

Variante 3: „graphisch“

Auch hier ist es sinnvoll, zunächst eine Termumformung wie in Variante 1 vorzunehmen!

$$5x^2 - 4x + 6 = x^2 + 2x + 6$$

Daraus folgt:

$$f(x) = 5x^2 - 4x + 6$$

$$g(x) = x^2 + 2x + 6$$

Die beiden Schnittpunkte liegen bei P(0/6) und Q(1,5/11,25).
=> x = 0 und x = 1,5 sind die Lösungen.