Wiederholung: Radioaktiver Zerfall

Radioaktive Zerfallsprozesse können durch die Funktion

$$f(t) = c \cdot a^t$$

beschrieben werden. Eine charakteristische Größe hierbei ist die Halbwertszeit der radioaktiven Elemente. Diese gibt die Zeitspanne an, in der sich die beobachtete Größe des betrachteten Elements jeweils halbiert hat. Besitzt ein Zerfallsprozess die Halbwertszeit $T_{1/2}$, dann ergibt sich die Funktion wie folgt:

$$f(t) = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

t = die laufende Zeit

f(t) = Intensität oder die Menge der Größe nach der Zeit t

c = Intensität oder Menge der Größe zu Beginn (t=0)

<u>Aufgabe 1:</u> Tschernobyl

Bei der Reaktorkatastrophe in Tschernobyl traten große Mengen an Jod-131 aus. Dieses lagert sich in großen Mengen in der Schilddrüse ab und ist dafür verantwortlich, dass speziell bei Kindern Krebserkrankungen entstehen. Dieses Jod-131 reduziert aufgrund des Kernbildungsprozesses seine Ausgangsmasse um bis zu 8,3 % am Tag, die in Strahlungsenergie umgewandelt und abgestrahlt wird.

a) Finde eine passende Funktionsgleichung und zeichne im Anschluss daran ihren Kurvenverlauf!

b) Welche Halbwertszeit besitzt das Jod-131?

Lösung:

Allgemein: $f(t) = c \cdot a^t$

Variante 1: Durch das 2-Punkteeinsetzungsverfahren folgt:

$50 = c \cdot a^0$ => c = 50

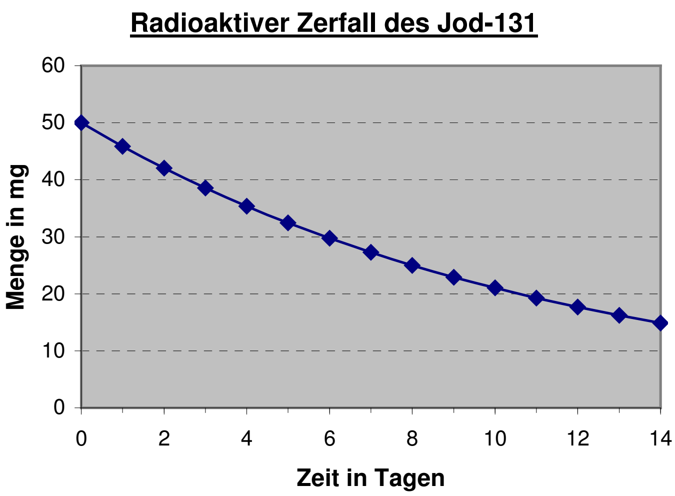
$45{,}85 = 50 \cdot a^1$ => $a = \frac{45{,}85}{50} = 0{,}917$

$f(t) = 50 \cdot 0{,}917^t$

Variante 2: Die Halbwertszeit des Jod-131 beträgt 8 Tage:

$f(t) = 50 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{8}}$

Tag	Menge des Jod-131 in mg
0	50,00
1	45,85
2	42,04
3	38,55
4	35,35
5	32,42
6	29,73
7	27,26
8	25,00
9	22,82
10	20,83
11	19,02
12	17,37
13	15,86
14	14,48



<u>Aufgabe 2:</u> Physikpraktikum

Nur ein kleiner Bestandteil der heute bekannten radioaktiven Isotope (Bezeichnung für Kerne mit gleicher Protonen-, aber verschiedener Neutronenzahl) ist in der Natur vorhanden. Der überwiegende Teil wird in Reaktoren künstlich erzeugt. So auch das radioaktive Isotop Rhodium-104.

Während eines Physikpraktikums wurden die radioaktiven Zerfallsraten von Rhodium-104 mit Hilfe eines Zählrohrs in Abhängigkeit von der Zeit gemessen und in der folgenden Messwerttabelle festgehalten:

Zeit in s	Gezählte Impulse des Zählrohrs
10	327
20	305
30	227
40	215
50	210
60	178
70	145
80	123
90	190
100	108
110	93
120	85
130	78
140	71
150	67
160	57
170	50
180	44

a) Um welchen funktionalen Zusammenhang handelt es sich hierbei?

b) Welche Halbwertszeit besitzt das radioaktive Rhodium-106?

c) Welchen Namen könnte der Punkt (90/190) tragen und wie könnte er entstanden sein?

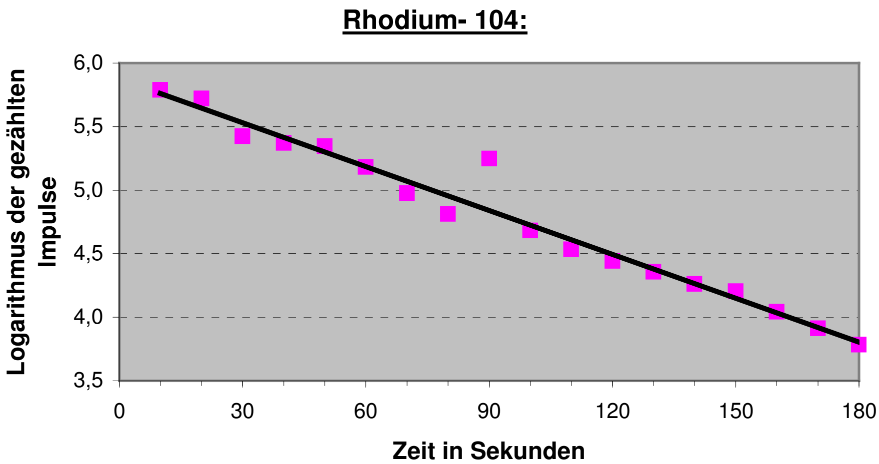
d) Welche Funktionsgleichung beschreibt den gegebenen Sachverhalt?

Lösung:

a) Es liegt ein exponentieller Zusammenhang vor.

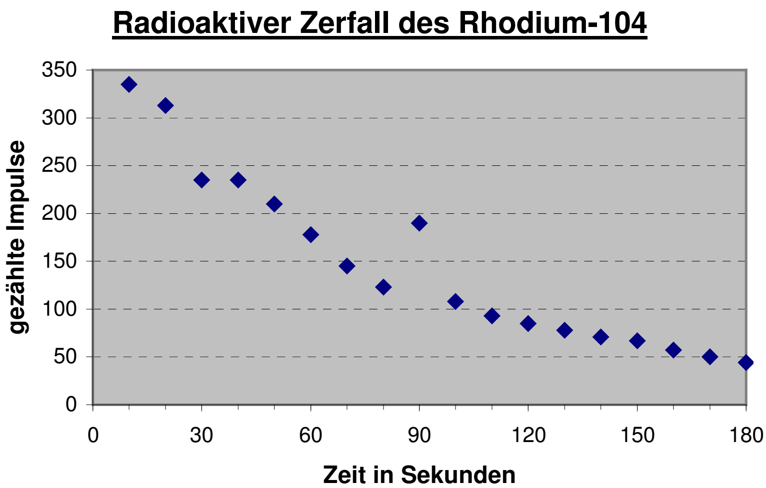
Begründung (freiwilliger Zusatz): Mit der Hilfe eines Regressionsverfahrens kann nun die Vermutung überprüft werden! Dabei wird die y-Achse neu formatiert beziehungsweise logarithmiert und die x-Achse behält ihre lineare Einteilung. Das Ergebnis muss eine Gerade (lineare Regression) sein, wenn es sich um einen exponentiellen Zusammenhang handelt.

b) Die Halbwertszeit des Rhodium-104 beträgt 60 sec.



c) Der Punkt (90/190) wird in der Regel als Ausreißer bezeichnet. Er entsteht durch Messfehler (Ungenauigkeiten der Apparatur, Ablesefehler oder einer Reaktionsverzögerung beim Ablesen der Messwerte). In diesem Fall liegt die Ursache des Ausreißers sehr wahrscheinlich beim „Messenden", der den Messwert falsch abgelesen hat.

d) Ermittlung der genäherten Funktionsgleichung durch das 2-Punkte-Einsetzungsverfahren:



$$f(t) = c \cdot a^t$$

$$327 = c \cdot a^{10} \quad => \quad c = \frac{327}{a^{10}}$$

$$210 = c \cdot a^{50} \quad => c = \frac{210}{a^{50}}$$

Durch Gleichsetzen erhält man den Wert für a:

$$\frac{327}{a^{10}} = \frac{210}{a^{50}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a^{50}}{a^{10}} = \frac{210}{327} \quad \Leftrightarrow \quad a^{40} = \frac{210}{327}$$

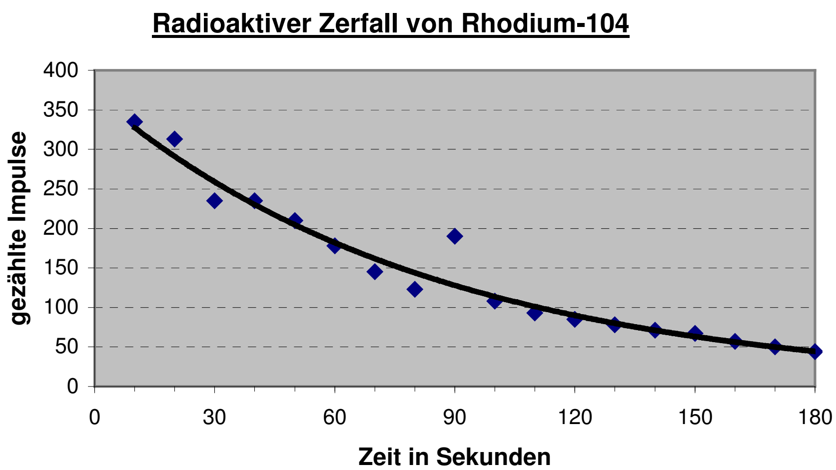
$$\Leftrightarrow \quad a = \sqrt[40]{\frac{210}{327}} = 0{,}989\,.$$

Einsetzen von a für einen Messpunkt ergibt:

$$327 = c \cdot 0{,}989^{10} \qquad => \; c = \frac{327}{0{,}989^{10}} = 365{,}3\,.$$

Mit den beiden Werten lautet die Funktionsgleichung:

$$f(t) = 365{,}3 \cdot 0{,}989^t \quad \text{oder} \quad f(t) = 365{,}3 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{60}}$$



<u>Aufgabe 3:</u> C-14-Methode

Die Gesetzmäßigkeiten des radioaktiven Zerfalls ermöglichen es den Wissenschaftlern weiterhin, näherungsweise das Alter von historischen Holzfunden und Knochen zu ermitteln. Verursacht durch die kosmische Strahlung wird in der Atmosphäre ständig das Kohlenstoffisotop C-14 gebildet.

Es stellt sich ein gleich bleibendes Verhältnis von C-14 : C-12 ein, welches etwa 1 : 1,67* 10^{11} ist. Die C-14 Isotope gelangen durch die Fotosynthese in lebende Pflanzen, durch die Aufnahme pflanzlicher Nahrung auch in die Tiere und somit auch in den Menschen. Stirbt die Pflanze, das Tier oder der Mensch, so wird kein neues C-14 aufgenommen und das radioaktive C-14 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5.730 Jahren.

a) 1991 wurde in den ötztaler Alpen die Leiche eines Steinzeitmenschen gefunden („Ötzi"). Die Messungen der Wissenschaftler stellten einen C-14-Gehalt von 57 % fest. Wie alt ist Ötzi?

b) Wie viel Prozent würde der C-14-Gehalt von Ötzi heute betragen?

c) In einem Knochenfund beträgt das Verhältnis von C-14 : C-12 nur noch 1 : 1,02* 10^{11}. Wie alt ist dieser Knochen?

d) Stelle das C-14 : C-12 Verhältnis in Abhängigkeit von der Zeit t graphisch dar!

Lösung:

a) Alter von Ötzi

$$f(t) = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \Leftrightarrow \frac{f(t)}{c} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(t)}{c}\right) = \frac{t}{T_{1/2}} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{\ln\left(\frac{f(t)}{c}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \Leftrightarrow t = T_{1/2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{f(t)}{c}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$t = 5.730 \cdot \frac{\ln\left(\frac{57\%}{100\%}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 4.646{,}84$$

Ötzi ist 4.646 Jahre alt.

b) Wir haben das Jahr 2006, d. h. mittlerweile ist Ötzi 15 Jahre „älter" geworden.

$$f(t) = 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5.730}}$$

$$f(t) = 100\% \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4.646,84+15}{5.730}} = 56,897\%$$

Der heutige C-14-Gehalt beträgt nur noch 56,897 %.

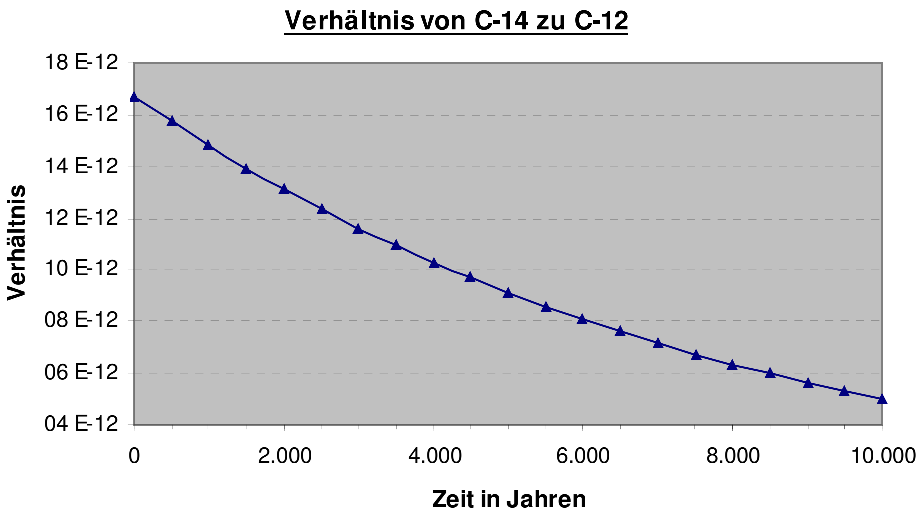
c) Nach den Umformungen aus Aufgabe a) gilt:

$$f(t) = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{½}}} \quad \Leftrightarrow \quad t = T_{½} \cdot \frac{\ln\left(\frac{f(t)}{c}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 5.730 \cdot \frac{\ln\left(\frac{1,02}{1,67}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = 4.075,63$$

Der Knochen ist ca. 4.075,63 Jahre alt.

d) Verhältnis von C-14 zu C-12:

$$f(t) = \frac{1}{1,67 \cdot 10^{11}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$



<u>Aufgabe 4:</u> Halbwertszeit

Zeige: Besitzt ein radioaktives Präparat die Halbwertszeit $T_{1/2}$, dann ergibt sich seine Funktion wie folgt:

$$f(t) = f(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Lösung:

$$f(t) = c \cdot a^t$$

Für t = 0 folgt daraus $c = f(t)$.

Für t = $T_{1/2}$ folgt, dass $f(T_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot f(0)$ gilt. Daraus lässt sich a wie folgt berechnen:

$$\frac{1}{2} \cdot f(0) = f(0) \cdot a^{T_{1/2}}$$

$$\frac{1}{2} = a^{T_{1/2}}$$

$$\Rightarrow \qquad a = \sqrt[T_{1/2}]{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{T_{1/2}}.$$

Also: $f(t) = f(0) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$ q.e.d.