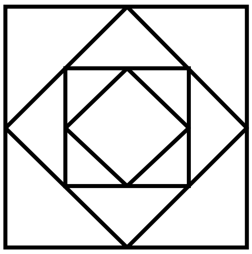
<u>Aufgabe 1:</u> Quadrat-Folge



Einem Quadrat der Seitenlänge 4cm wird ein zweites Quadrat derart einbeschrieben, dass dessen Ecken in den Seitenmitten des ersten liegen. Setzt man dieses Verfahren fort, so entsteht eine Folge von Quadraten. Die Abbildung zeigt Dir die ersten vier Quadrate.

a) Welche Seitenlänge hat das erste einbeschriebene Quadrat? Berechne auch den Flächeninhalt und den Umfang!

b) Zeichne das vierte einbeschriebene Quadrat ein und berechne dessen Seitenlänge, Flächeninhalt und Umfang!

c) Wie kann man die Seitenlänge des n-ten Quadrats für in Abhängigkeit von einer beliebigen Seitenlänge des ersten Quadrats (Seitenlänge a) berechnen?

d) „Variation – Weiterführung“: Stelle Flächeninhalt und Umfang des n-ten Quadrats in Abhängigkeit von der Seitenlänge a des ersten Quadrates dar!

Lösung:

a) $a_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. (Satz des Pythagoras)

$$A_1 = a^2 \cdot \frac{1}{2} = 4^2 \cdot \frac{1}{2} = 8$$

$$U_1 = 4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \frac{4}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$$

b) In dieser Teilaufgabe gibt es zwei Lösungsmöglichkeiten: Entweder man erkennt *Invariante* das Verhältnis der Seitenlängen zweier aufeinanderfolgender Quadrate. Dieses beträgt

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(Satz des Pythagoras).}$$

Daraus kann man die Seitenlänge des nächsten Quadrats rekursiv berechnen:

$$a_4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \cdot a = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

Man kann aber auch zunächst die Seitenlänge des zweiten einbeschriebenen Quadrats berechnen, anschließend die des dritten etc.

$$A_4 = a_4{}^2 = 1$$

$$U_4 = 4 \cdot a_4 = 4$$

c) Für die Seitenlänge des n-ten Quadrats, d.h. die des (n-1)-ten einbeschriebenen Quadrats, gilt:

$$a_n = a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1}$$

d) Damit folgt für den Flächeninhalt und Umfang:

$$A_n = a^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$ (Flächeninhalt)

$$U_n = 4a \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{n-1}$$ (Umfang)