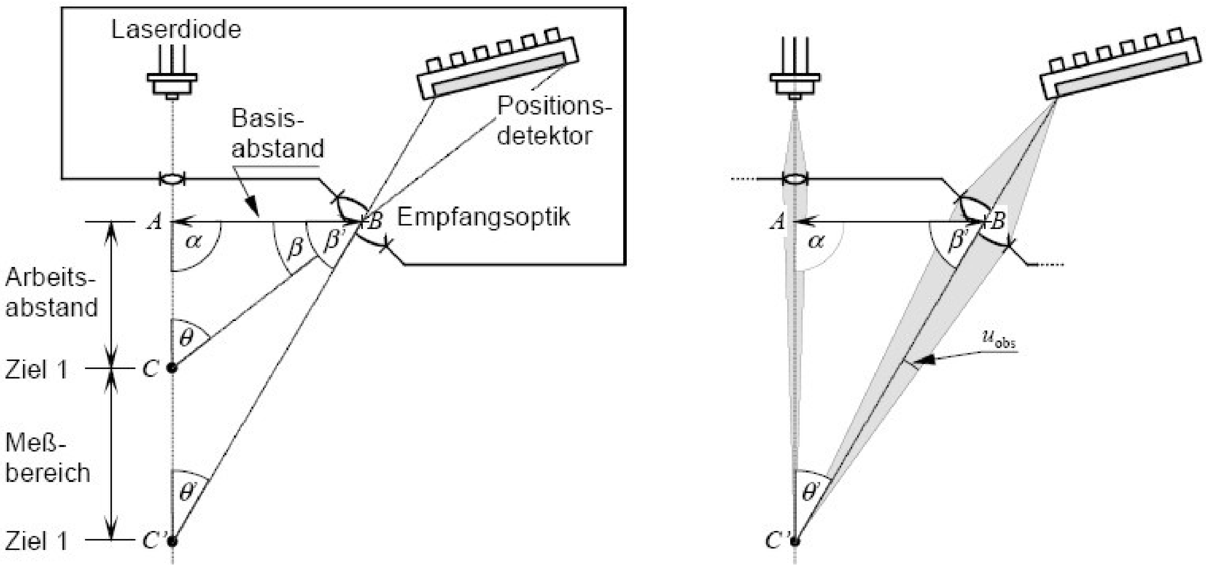
<u>Aufgabe 1:</u> Laserabstandsmessung

Mit Hilfe der sogenannten Triangulationstechnik kann der Abstand eines Objektes mit einem Lasersensor bestimmt werden. Der Messbereich reicht von einigen Millimetern bis zu maximal 10 Metern, was die Triangulation zum meistbenutzten Entfernungsmessverfahren mittels Laser macht. Da weniger als 10 ms Messdauer erforderlich sind, können auch Schwingungen online erfasst werden.

Die Anwendungsmöglichkeiten der Triangulation sind äußerst vielfältig. Unter anderem kontrollieren und regeln solche Verfahren in Echtzeit Produktionsprozesse, überwachen die Produktqualität, positionieren Roboterarme und regeln die Fahrwerke der Rennboliden von Schumacher, und Co.

Deformierung *Taumelprüfung* *Profilerfassung*

a) Betrachte das folgende Prinzipbild der Lasertriangulation und beschreibe die Funktionsweise dieses Messverfahrens.



b) Die Auswertung der Abstandsmessung erfolgt mit Hilfe eines Mikrocontrollers, der mit einem Softwarealgorithmus die Entfernung bestimmt. Der Basisabstand eines Sensors betrage 20 mm. Wie lautet die Funktion, nach der das Softwareprogramm den Abstand zum Messobjekt berechnet?

c) Aufgrund des Positionsdetektors können Winkel β von 25° bis 75° gemessen werden. Welchen Messbereich kann der Hersteller im Datenblatt dieses Sensors angeben?

Lösung:

Aufgabe 1.a)

Die Triangulationstechnik bestimmt den Wert einer Entfernung über die Auswertung einer Dreiecksberechnung. Dies erfolgt durch den seitlichen Blick eines Positionsdetektors auf den Zielpunkt. Das Dreieck ist durch die Kenntnis zweier Winkel (α und β) und einer Seitenlänge, den sogenannten Basisabstand AB, eindeutig bestimmt. Durch die gerätetechnische Festlegung des rechten Winkels α und der Basislänge AB sowie durch die Messung des Winkels β kann somit die Länge, bzw. Entfernung AC bestimmt werden.

Aufgabe 1.b)

Mit α = 90° folgt:

$$\tan(\beta) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \tan(\beta)$$

Mit der konstanten Basislänge von 20 mm und der Variablen β folgt als Algorithmus für das Softwareprogramm:

$$\overline{AC} = f(\beta)$$

$$\overline{AC} = 20mm \cdot \tan(\beta)$$

Voraussetzung ist, dass der Winkel β zuvor aus der Auswertung des Positionsdetektors bestimmt wurde.

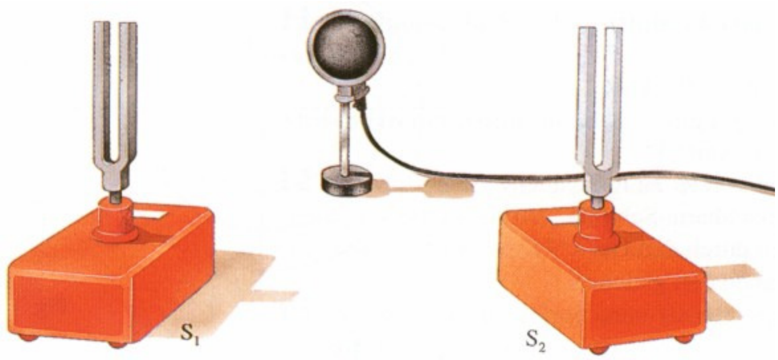
Aufgabe 1.c)

$$\overline{AC} = 20mm \cdot \tan(\beta_1) = 20mm \cdot \tan(25°) = 9{,}326mm$$

$$\overline{AC} = 20mm \cdot \tan(\beta_2) = 20mm \cdot \tan(75°) = 74{,}641mm$$

Um auch an den Messbereichsenden noch zuverlässig Werte messen zu können, sollte der Messbereich etwas kleiner angegeben werden (Kundenzufriedenheit). Somit könnte die Herstellerangabe von 10 mm bis 74 mm lauten.

<u>Aufgabe 2:</u> Überlagerung von Schwingungen



Einer Membran stehen zwei Schallquellen S_1 und S_2 gegenüber. Ein von der Schallquelle S_1 (bzw. S_2) erzeugter Ton bewirkt eine Schwingung der Membran, wobei die Funktion $f_1 : t \mapsto f_1(t)$ (bzw. $f_2 : t \mapsto f_2(t)$) die Auslenkung eines Punktes der Membran aus der Ruhelage beschreibt. Gehen von beiden Schallquellen gleichzeitig Töne aus, so wird die Bewegung eines Punktes der Membran durch die Funktion $f : t \mapsto f_1(t) + f_2(t)$ beschrieben.

In der Physik sagt man, die beiden Schwingungen überlagern sich; in der Mathematik nennt man f die Summe der Funktionen f_1 und f_2. Die von einer Stimmgabel erzeugten Schwingungen einer Membran lässt sich durch die allgemeine Sinusfunktion beschreiben. Dabei ist die Amplitude ein Maß für die Lautstärke und die Frequenz ein Maß für die Tonhöhe.

allgemeine Sinusfunktion: $t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t - c)$

a) Begründe: Die Summe zweier allgemeiner Sinusfunktionen mit gleicher Frequenz und Phasenverschiebung ist eine allgemeine Sinusfunktion mit gleicher Frequenz und Phasenverschiebung. Ihre Amplitude ist die Summe der beiden einzelnen Amplituden.

b) Bei der Überlagerung von Schwingungen ergibt sich mit Hilfe der Additionstheoreme:

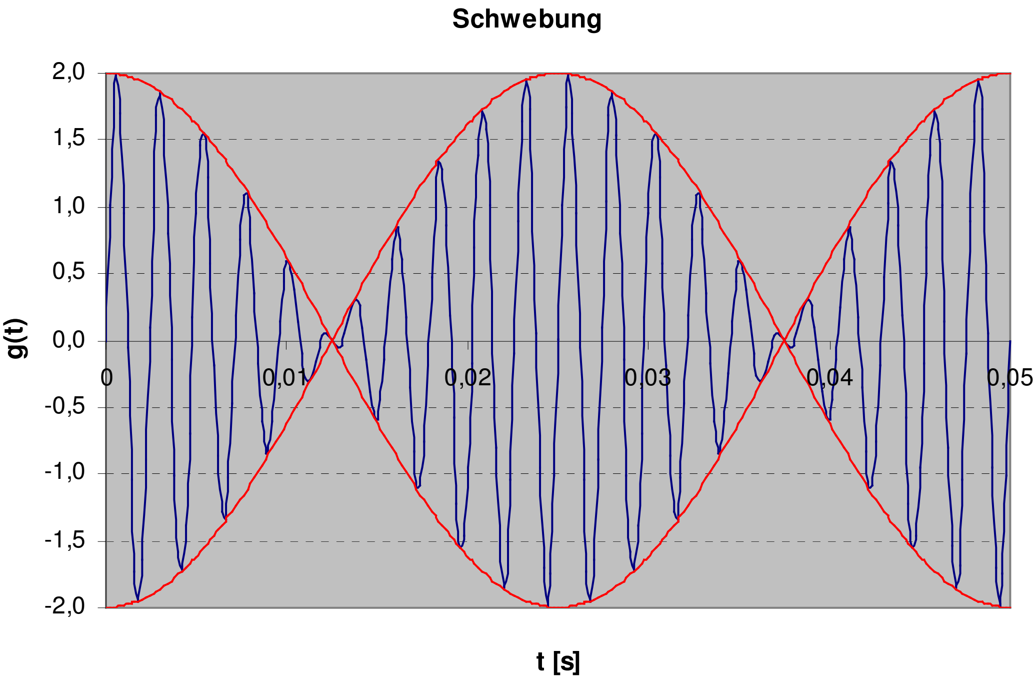
$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Zwei unterschiedliche Töne $g_1(t)$ und $g_2(t)$ werden überlagert. Zeige mit Hilfe dieser Formel, dass für g(t) gilt:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) = 2 \cdot \cos\left((f_1 - f_2)\pi \cdot t\right) \cdot \sin\left((f_1 + f_2)\pi \cdot t\right)$$

mit $g_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right)$ und $g_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t\right)$.

c) Der dunkelblaue Graph gehört im Diagramm zu der Funktion g(t) mit den Frequenzen 440 Hz und 400 Hz. Begründe mit dem Ergebnis aus Aufgabenteil b), dass der Graph von g zwischen den beiden roten Graphen zu den Funktionen $t \to 2 \cdot \cos(40\pi \cdot t)$ und $t \to -2 \cdot \cos(40\pi \cdot t)$ liegen muss.



d) Wie geht demnach ein Klavierstimmer vor, wenn er ein Klavier mit Hilfe einer Stimmgabel stimmt?

Lösung:

Aufgabe 2.a)

$$f_1(t) = a_1 \cdot \sin(b \cdot t - c)$$

$$f_2(t) = a_2 \cdot \sin(b \cdot t - c)$$

$$(f_1 + f_2)(t) = f_1(t) + f_2(t) = (a_1 + a_2) \cdot \sin(b \cdot t - c)$$

Aufgabe 2.b)

Mit $f = \frac{1}{T}$ folgt mit

$g_1(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t\right) = \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t)$ und $g_2(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t\right) = \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$ für g:

$$g(t) = g_1(t) + g_2(t) = \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t) + \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t)$$

Einsetzen in die gegebene Gleichung ergibt:

$$g(t) = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot f_1 \cdot t - 2\pi \cdot f_2 \cdot t}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot f_1 \cdot t + 2\pi \cdot f_2 \cdot t}{2}\right)$$

$$g(t) = 2 \cdot \cos((f_1 - f_2)\pi \cdot t) \cdot \sin((f_1 + f_2)\pi \cdot t)$$

Aufgabe 2.c)

Einsetzen der Frequenzwerte ergibt:

$$g(t) = 2 \cdot \cos(40\pi \cdot t) \cdot \sin(840\pi \cdot t)$$

Durch Setzten der eckigen Klammern in der allgemeingültigen Gleichung wird deutlich, dass es sich bei der Überlagerung von Schwingungen um eine Sinus-Funktion mit dem arithmetischen Mittel der beiden Ausgangsschwingungen g_1 und g_2 handelt.

$$\sin(x) + \sin(y) = \left[2 \cdot \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)\right] \cdot \sin\left(\frac{x + y}{2}\right)$$

Der eckige Teil der Gleichung entspricht der Variablen a der allgemeinen Sinusfunktion und beschreibt die Amplitude der Funktion.

$$f(t) = a \cdot \sin(b \cdot t - c)$$

In diesem Fall handelt es sich bei der Amplitude nicht um eine Konstante, sondern um eine Cosinus-Funktion, die als „umhüllende“ Funktion im Diagramm rot dargestellt ist. Somit gilt:

$$-2 \cdot \cos(40\pi \cdot t) \le g(t) \le 2 \cdot \cos(40\pi \cdot t)$$

Aufgabe 2.d)

Wenn man die Saite eines Instruments anschlägt, so schwingen viele andere Teile des Instruments mit. Aus der Überlagerung all dieser Schwingungen entsteht die sogenannte Klangfarbe des jeweiligen Instruments. Der Kammerton „A“ hat eine Frequenz von 440 Hz. Wenn man eine Stimmgabel anschlägt, hört man diese Tonhöhe. Dieser Kammerton beruht auf einer weltweiten Übereinkunft der internationalen Stimmtonkonferenz. Nur so ist gewährleistet, dass mehrere Instrumente die gleiche Tonhöhe haben und somit auch miteinander in einem Orchester musizieren können. Aus diesem Grund konstruieren alle Klavierbauer weltweit ihre Klaviere so, dass sie am besten klingen, wenn sie diese Tonhöhe haben.

Beim Klavierstimmen lässt sich die Tonhöhe durch Spannen der Saiten verstellen. Der Klavierstimmer schlägt zum Stimmen das „A“ des Klaviers und gleichzeitig die Stimmgabel an. So überlagert er diese beide Töne. Je kleiner der Frequenzunterschied zwischen beiden Tönen, um so langsamer schwingt die Schwebung, die sich als Lautstärkeänderung bemerkbar macht. Die Töne haben die gleiche Frequenz, wenn keine Schwebung mehr hörbar ist. In diesem Falle ist die Differenz der Frequenzen gleich null und der Cosinus wird gleich eins.

Mit diesem Verfahren lassen sich auch kleine Frequenzunterschiede mit dem Gehör bestimmen, da die Amplitude der Schwebung unabhängig von den einzelnen Frequenzen ist. Das An- und Abschwellen der Lautstärke ist also nur vom Frequenzunterschied abhängig.

Aufgabe 3:

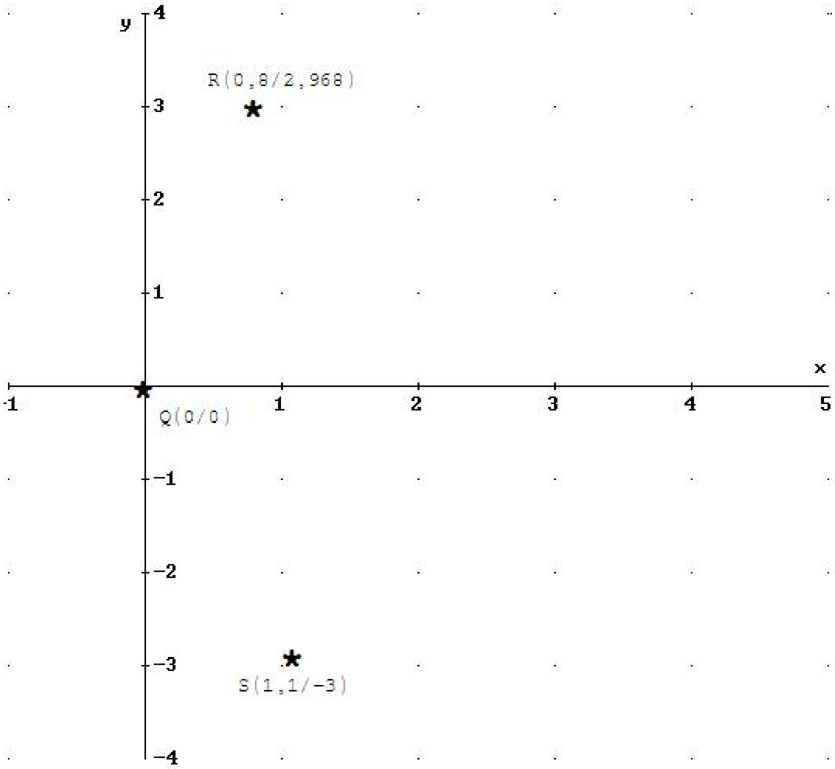
a) Deute aus der gegebenen Funktion ihre Amplitude und ihre Phasenverschiebung!

$$f(x) = 4 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

b) Welche Auswirkungen haben die Schwingungsparameter a, b, c und d im Allgemeinen auf den Graphen der Funktion?

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$$

c) Ermittle die Funktionsgleichung der trigonometrischen Funktion mit einer Amplitude von 3 cm, die durch die folgenden drei Punkte (Q = (0/0), R = (0,8/2,968) und S = (1,1/-3)) verläuft und zeichne sie in das beigefügte Koordinatensystem ein!



d) Vereinfache die gegebene Funktion! Welche Strategie hast du zur Lösung verwendet?

$$f(x) = \frac{4 \cdot \cos^2(x) \cdot \sin(x) - 4 \cdot \sin^3(-x)}{-8 \cdot \cos(-x)}$$

e) Ermittle alle Nullstellen der folgenden Funktion! Welche Möglichkeiten kennst du, solch einen Typ von Aufgaben zu lösen?

$$f(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin^2(x) + 1$$

Lösung:

Aufgabe 3.a) $f(x) = 4 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Amplitude = 4,

Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links vom Koordinatenursprung

Aufgabe 3.b) $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$

a = Amplitude (Schwingungsweite)

$|a| > 1$: Streckfaktor in y-Richtung

$|a| < 1$: Stauchfaktor in y-Richtung

b = Streck- / Stauchfaktor in x-Richtung

$|b| < 1$: Streckfaktor in x-Richtung

$|b| > 1$: Stauchfaktor in x-Richtung

c = Verschiebung in x-Richtung

c < 0 in die positive x-Richtung

c > 0 in die negative x-Richtung

d = Verschiebung in y-Richtung

d > 0 in die positive y-Richtung

d < 0 in die negative y-Richtung

Aufgabe 3.c)

Die Funktionsgleichung aus den gegebenen Daten lautet:

$$f(x) = 3 \cdot \sin(b \cdot x + c)$$

Punkteeinsetzungsverfahren:

$$0 = 3 \cdot \sin(c) \quad \Leftrightarrow \quad 0 = \sin(c) \quad \Rightarrow \quad c = 0 \;\; oder \;\; c = n \cdot \pi$$

Annahme: c = 0

=> $f(x) = 3 \cdot \sin(b \cdot x)$

Schritt 1: Einsetzen des Punkts R(0,8/2,968) in f(x)

$$2{,}968 = 3 \cdot \sin(0{,}8 \cdot b)$$

$$0{,}989 = \sin(0{,}8 \cdot b)$$

=> $b = 1{,}781$

Schritt 2: Kontrolle durch Einsetzen des Punkts S(1,1/-3) und b =1,781 in f(x)

$$-3 = 3 \cdot \sin(1{,}1 \cdot b)$$

$$-1 \neq \sin(1{,}1 \cdot 1{,}781)$$

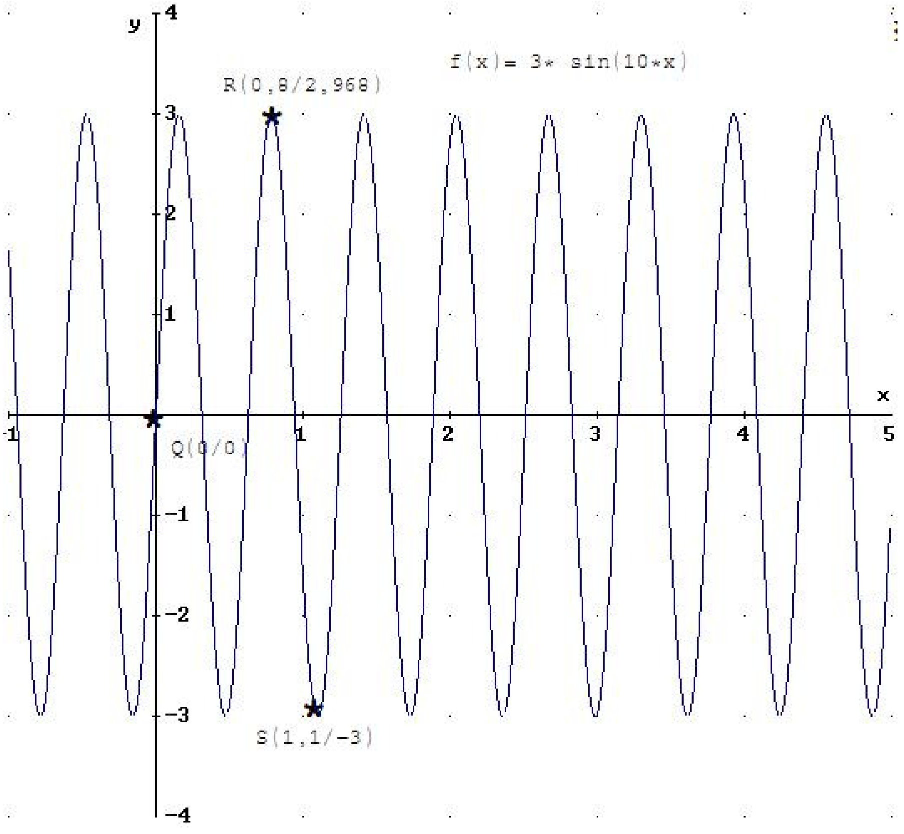
=> $b \neq 1{,}781$

Schritt 3: Lösen durch systematisches Testen!

b	$3 \cdot \sin(0{,}8 \cdot b)$	$3 \cdot \sin(1{,}1 \cdot b)$
0	0	0
1	2,152	2,674
2	2,999	2,425
3	2,026	-0,473
4	-0,175	-2,855
5	-2,27	-2,117
6	-2,988	0,935
7	-1,894	2,65
8	0,35	1,755
9	2,81	-1,373
10	2,968	-2,999 ~ - 3

=> b = 10

=> $f(x) = 3 \cdot \sin(10 \cdot x) \quad oder \quad f(x) = 3 \cdot \sin(10 \cdot x + 2 \cdot n \cdot \pi) \ mit \ n \in Z$



Aufgabe 3.d) Strategie: Zerlegungsprinzip

$$f(x) = \frac{4 \cdot \cos^2(x) \cdot \sin(x) - 4 \cdot \sin^3(-x)}{-8 \cdot \cos(-x)}$$

$$= \frac{4 \cdot \sin(x) \cdot \left[\cos^2(x) + \sin^2(x)\right]}{-8 \cdot \cos(x)}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \tan(x)$$

denn $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ und $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Aufgabe 3.e) $f(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin^2(x) + 1$

Variante 1: algebraisch

$$f(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin^2(x) + 1 = 0$$

$$\cos(x) + 1 = 2 \cdot \sin^2(x)$$

$$\cos(x) + 1 = 2 \cdot (1 - \cos^2(x))$$ denn $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

$$\cos(x) + 1 = 2 - 2 \cdot \cos^2(x)$$

$$2 \cdot \cos^2(x) + \cos(x) - 1 = 0$$

Substitution $\cos(x) = u$

$$\cos^2(x) + \frac{1}{2} \cdot \cos(x) - \frac{1}{2} = 0$$

$$u^2 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2} = 0$$ p-q-Formel

$$u_{1/2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

=> $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -1$

Resubstitution:

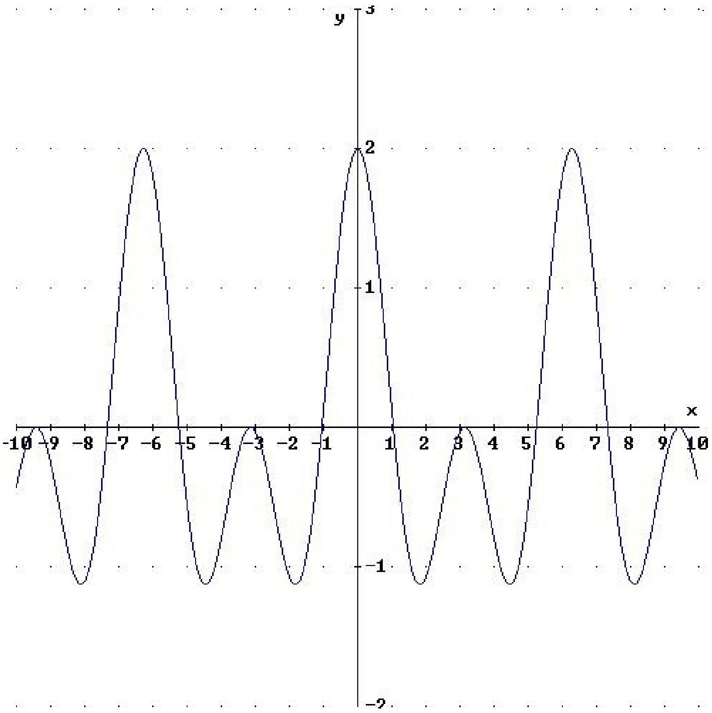
$\cos(x) = \frac{1}{2}$ => $x = \frac{1}{3} \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$ oder $x = \frac{5}{3} \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$

$\cos(x) = -1$ => $x = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi$

$$L = \left\{ \frac{1}{3} \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \middle| k \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{5}{3} \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \middle| k \in Z \right\} \cup \left\{ \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \middle| k \in Z \right\}$$

Variante 2: graphisch

$$f(x) = \cos(x) - 2 \cdot \sin^2(x) + 1$$



Durch Ablesen der Nullstellen folgt:

$$L = \left\{ \frac{1}{3} \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \middle| k \in Z \right\} \cup \left\{ \frac{5}{3} \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \middle| k \in Z \right\} \cup \left\{ \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \middle| k \in Z \right\}$$