

Aufgabe 1: Die Erde

Die Erde ist der fünftgrößte der neun Planeten unseres Sonnensystems und wiegt $5,98 \cdot 10^{24}$ kg. Sie ist zwischen 4 und 4,5 Millionen Jahren alt und bewegt sich auf einer elliptischen Bahn in einem durchschnittlichen Abstand von etwa 150 Millionen Kilometer um die Sonne. Für ihren Umlauf benötigt sie 365 Tage und 6 Stunden, also etwas länger als ein Jahr. Deshalb ist jedes vierte Jahr ein Schaltjahr mit 366 Tagen. Gleichzeitig mit der Bewegung um die Sonne, dreht sie sich auch einmal am Tag um ihre eigene Achse. Dadurch entsteht der Wechsel von Tag und Nacht. Das Meer bedeckt rund 71 % der Erdoberfläche und ist damit der größte Lebensraum der Erde. Seine Besonderheiten liegen in der Tiefe, der Ausdehnung und den dadurch sehr weiträumigen Nahrungsbeziehungen.



- a) Das Volumen der Erde beträgt $1.083.219.000.000 \text{ km}^3$ (~ eine Billion km^3). Welchen Radius besitzt die Erde?
- b) Welchen Flächeanteil der Erde in km^2 nimmt das Meer davon in Anspruch?
- c) Angenommen, entlang des Äquators wird eine Schnur fest um die Erde als ideale Kugel gespannt. Um wie viele Kilometer müsste diese Schnur verlängert werden, damit du im aufrechten Gang überall durch sie hindurch gehen könntest? Schätze zunächst, bevor du zu rechnen beginnst!
Welchen der folgenden Aussagen stimmst du am ehesten zu?
 - Die Schnur muss nur um meine Körpergröße verlängert werden.
 - Die Schnur muss um das doppelte meiner Körpergröße verlängert werden.
 - Die Schnurverlängerung beträgt weniger als einen Kilometer.
 - Die Schnur muss um 186,7km erweitert werden.

Wiederholungsaufgabe zum Problemlösen aus Klasse 8:

- d) Zwei Amphibienfahrzeuge (Fahrzeuge, die sowohl über Land fahren als auch über Wasser gleiten können) fahren entlang des Äquators der Erde (ideale Kugel) einander entgegen. Das erste Fahrzeug fährt mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 100 km/h und das zweite Fahrzeug mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von 120 km/h.
 - Wann treffen sich die beiden Fahrzeuge?
 - Welche Herangehensweisen an die Lösung dieser Aufgabe kennst du?
 - Wie viel km sind die beiden Fahrzeuge bis dahin bereits gefahren?Welchen Teil des Kreisumfangs durchläuft jedes Fahrzeug zwischen den zwei Begegnungen?

Lösung:

Aufgabe 1.a)

$$V_{Erde} = V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = 1.083.219.000.000 \text{ km}^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{1.083.219.000.000 \cdot 3}{4 \cdot \pi}} = 6.371 \text{ km}$$

Der Erdradius beträgt 6.371 km.

Aufgabe 1.b)

$$O_{Erde} = O_{Kugel} = 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 510.064.471,9 \text{ km}^2$$

Das Meer nimmt 71% der Erdoberfläche ein.

$$O_{Erde} \cdot 71\% = O_{Kugel} \cdot 71\% = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 71\% = 510.064.471,9 \text{ km}^2 \cdot 0,71 = 362.145.775 \text{ km}^2$$

Das Meer bedeckt 362.145.775 km² der Erdoberfläche.

Aufgabe 1.c)

Die dritte Antwort ist richtig: „Die Schnurverlängerung beträgt weniger als einen Kilometer.“

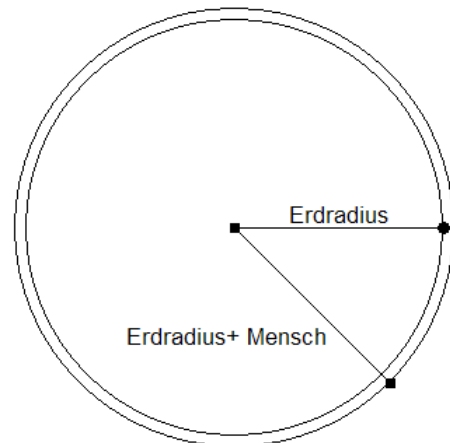
$$U_{Erde} = U_{Kreis} = 2 \cdot \pi \cdot r = 40.030,17 \text{ km}$$

Meine Körpergröße beträgt 1,65 m:

$$U_{Erde+Mensch} = 2 \cdot \pi \cdot (6.371 \text{ km} + 0,00165 \text{ km})$$

$$U_{Erde+Mensch} = 40.030,18 \text{ km}$$

Der Schnur muss um 0,01 km = 10 m länger als der Erdumfang sein, damit ich hindurch passe!



Aufgabe 1.d)

$$U_{Erde} = 2 \cdot \pi \cdot r_{Erde} = 40.030,17 \text{ km}$$

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{zurückgelegter Weg}}{\text{benötigte Zeit}} \Leftrightarrow v = \frac{s}{t}$$

Die beiden Fahrzeuge benötigen folgende Zeiten, um die Erde zu umrunden:

$$t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{40.030,17 \text{ km}}{100 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 400,3 \text{ h}$$

$$t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{40.030,17 \text{ km}}{120 \frac{\text{km}}{\text{h}}} = 333,58 \text{ h}$$

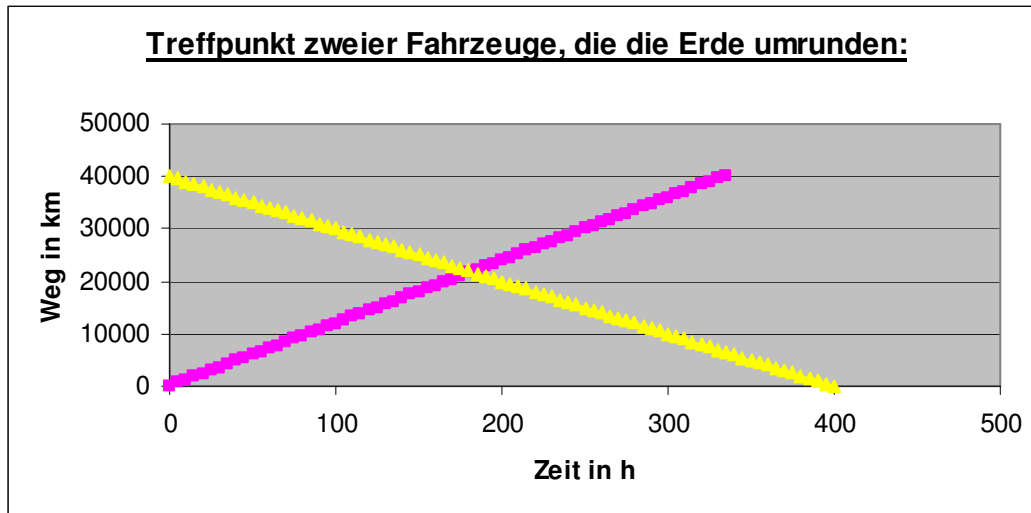
Lösungsvariante 1: „graphisch“

y_1 = Weg, den das erste Fahrzeug noch zurücklegen muss, um die Erde einmal zu umrunden

y_2 = zurückgelegter Weg des zweiten Fahrzeugs

$$y_1 = 40.030,17 \text{ km} - 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$$

$$y_2 = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$$



Nach ca. 182 Stunden treffen sich die beiden Fahrzeuge. Das erste Fahrzeug ist in dieser Zeit 18.200 km gefahren und das zweite Fahrzeug 21.840 km. Das entspricht für das erste Fahrzeug ca. 45,47 % und das zweite Fahrzeug ca. 54,56 % des Erdumfangs.

Lösungsvariante 2: „algebraisch“

$$y_1 + y_2 = 40.030,17 \text{ km}$$

$$y_1 = 100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$$

$$y_2 = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t$$

$$100 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t + 120 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = 40.030,17 \text{ km}$$

$$220 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot t = 40.030,17 \text{ km}$$

$$t = 181,96 \text{ h}$$

Die beiden Fahrzeuge treffen sich nach 181,96 h.

Das erste Fahrzeug ist in dieser Zeit 18.196 km gefahren, das zweite 21.835,2 km. Das entspricht für das erste Fahrzeug ca. 45,46 % und das zweite Fahrzeug ca. 54,55 % des Erdumfangs.

Lösungsvariante 3: „Tabelle“

Zeit in h	Fahrzeug 1	Fahrzeug 2	Summe
0	0	0	0
50	5000	6000	11000
100	10000	12000	22000
150	15000	18000	33000
160	16000	19200	35200
170	17000	20400	37400
180	18000	21600	39600
190	19000	22800	41800
200	20000	24000	44000
250	25000	30000	55000
300	30000	36000	66000
350	35000	42000	77000
400	40000	48000	88000

Zeit in h	Fahrzeug 1	Fahrzeug 2	Summe
180	18000	21600	39600
181	18100	21720	39820
182	18200	21840	40040
183	18300	21960	40260
184	18400	22080	40480

Nach ca. 182 h treffen sie sich!

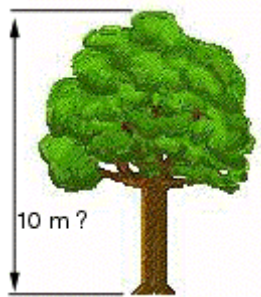
Das erste Fahrzeug ist in dieser Zeit 18.200 km und das zweite Fahrzeug 21.840 km gefahren. Das entspricht für das erste Fahrzeug ca. 45,47 % und das zweite Fahrzeug ca. 54,56 % des Erdumfangs.

Aufgabe 2: Der Baum

Der Stamm eines Baumes verzweigt sich erst in einiger Höhe über dem Boden. Er gibt den Menschen Auskunft darüber, wie alt er ist, denn er wächst in jedem Jahr um einen kreisförmigen Ring an.

Die Breite der Jahresringe hängt von den Wetterbedingungen im Jahresverlauf ab. Es kann jedoch gesagt werden, dass der Umfang des Stammes um durchschnittlich 2,5 cm pro Jahr zunimmt!

Manche Baumarten wie Rosenhölzer und Tannen wachsen allerdings schneller, andere wie Eiben, Linden und Rostkastanien wachsen langsamer.



Welches Volumen besitzt die Baumkrone des nebenstehenden Baumes?

Lösung:

Modellierungsannahme: Die Baumkrone ist eine ideale Kugel!

Der Baum ist, wenn wir mit dem Lineal nachmessen, 3,8 cm hoch. Das entspricht (wie angegeben) einer realen Höhe von 10 m. Der Durchmesser der Baumkrone beträgt ungefähr 2,4 cm, d. h. der reale Durchmesser der Baumkrone beträgt demzufolge:

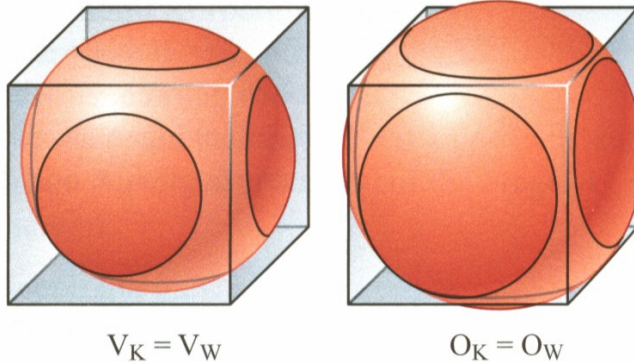
$$d = 10m \cdot \frac{2,4cm}{3,8cm} = 6,32m$$

$$V_{\text{Baumkrone}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{6,32m}{2}\right)^3 = 132,18m^3$$

Die Baumkrone besitzt ein reales Volumen von 132,18 m³.

Aufgabe 3: Kugel und Würfel

Eine Kugel und ein Würfel haben denselben Mittelpunkt und entweder gleiches Volumen oder gleiche Oberfläche.



Berechne für beide Fälle

- den Radius r der Kugel, wenn der Würfel die Kantenlänge $a = 20 \text{ cm}$ hat,
- die Kantenlänge a des Würfels, wenn die Kugel den Radius $r = 20 \text{ cm}$ hat.
- Begründe, dass in beiden Fällen die Kugel die Würfelflächen schneidet, aber nicht die Würfelkanten. Tipp: Horizontalschnitt, Pythagoras

Lösung:

a) Kantenlänge $a = 20 \text{ cm}$

$$V_W = (20 \text{ cm})^3 = 8000 \text{ cm}^3$$

$$O_W = 6 \cdot (20 \text{ cm})^2 = 2400 \text{ cm}^2$$

$$V_K = 8000 \text{ cm}^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$$

$$O_K = 2400 \text{ cm}^2 = 4\pi \cdot r^2$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 8000 \text{ cm}^3}{4\pi}} = 12,4 \text{ cm}$$

$$r = \sqrt{\frac{2400 \text{ cm}^2}{4\pi}} = 13,8 \text{ cm}$$

b) Radius $r = 20 \text{ cm}$

$$V_K = \frac{4}{3} \pi \cdot (20 \text{ cm})^3 = 33.510 \text{ cm}^3$$

$$O_K = 4\pi \cdot (20 \text{ cm})^2 = 5026,6 \text{ cm}^2$$

$$V_W = 33.510 \text{ cm}^3 = a^3$$

$$O_W = 5026,6 \text{ cm}^2 = 6 \cdot a^2$$

$$a = \sqrt[3]{33.510 \text{ cm}^3} = 32,2 \text{ cm}$$

$$a = \sqrt{\frac{5026,6 \text{ cm}^2}{6}} = 28,9 \text{ cm}$$

c) Die Kugel schneidet die Würfelflächen, weil $2r > a$:

$$\text{Werte aus a)} \quad 2 \cdot 12,4\text{cm} > 20\text{cm} ; 2 \cdot 13,8\text{cm} > 20\text{cm}$$

$$\text{Werte aus b)} \quad 2 \cdot 20\text{cm} > 32,2\text{cm} ; 2 \cdot 20\text{cm} > 28,9\text{cm}$$

Mit Hilfe einer Mittelebene des Würfels lässt sich die Flächendiagonale b mit dem Satz des Pythagoras bestimmen. Die Kugel schneidet die Kanten nicht, wenn $2r < b$.

Werte aus a)

$$b_1 = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot (20\text{cm})^2} = 28,28\text{cm}$$

$$2 \cdot 12,4\text{cm} < 28,28\text{cm} ; 2 \cdot 13,8\text{cm} < 28,28\text{cm}$$

Werte aus b)

$$b_2 = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot (32,2\text{cm})^2} = 45,5\text{cm} \qquad 2 \cdot 20\text{cm} < 45,5\text{cm}$$

$$b_3 = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2 \cdot (28,9\text{cm})^2} = 40,9\text{cm} \qquad 2 \cdot 20\text{cm} < 40,9\text{cm}$$