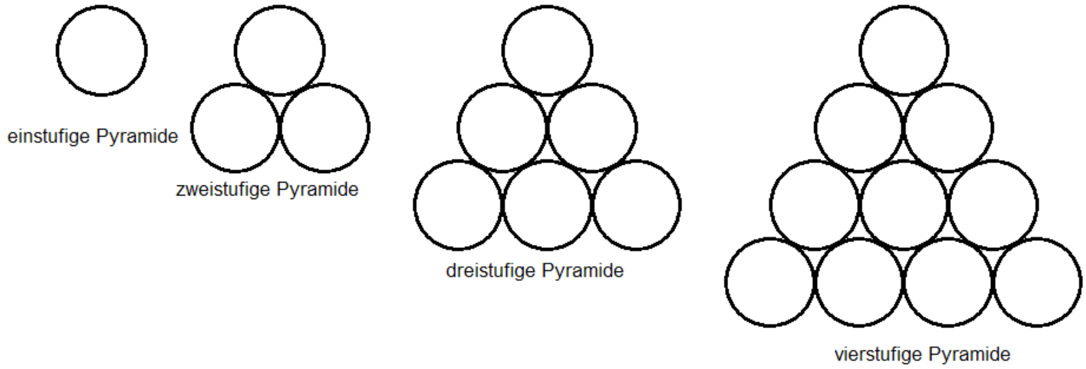
<u>Lernaufgabe:</u> Kugelpyramiden



a) Jede Kugel der Kugelpyramide besitzt einen Radius von zwei Zentimeter. Berechne das Volumen einer Kugel!

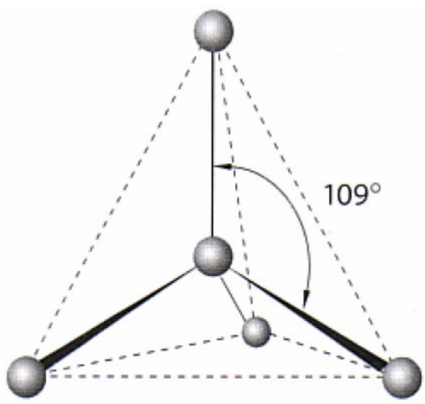
b) Vervollständige die folgende Tabelle!

Anzahl n der Stufen	Anzahl x der Kugeln in der n- ten Stufe	Anzahl y der Kugeln in der gesamten Pyramide
1	1	1
2	3	4
3		
4		
5		
6		
…	…	…
n		

c) Wie viele Stufen besitzt eine Kugelpyramide, die 220 Kugeln besitzt? Hinweis: Die Anzahl y der Kugeln in der gesamten Pyramide kann mit Hilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$y = \frac{1}{12} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+4)$$

d) Vier gleich große Kugeln mit einem Radius von zwei Zentimeter werden in Form einer Kugelpyramide aufeinander gelegt. Die Kugelpyramide soll nun von einer weiteren Kugel umschlossen werden. Berechne den Radius und das Volumen der umhüllenden Kugel!



Lösung:

Aufgabe 1.a)

$$V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2cm)^3 = \frac{32}{3} \cdot \pi = 33{,}51 cm^3$$

Aufgabe 1.b)

Anzahl n der Stufen	Anzahl x der Kugeln in der n- ten Stufe	Anzahl y der Kugeln in der gesamten Pyramide
1	1	1
2	3 = 1 + 2	4 = 1+ 3
3	6 = 1 + 2 + 3	10 = 1 + 3 + 6
4	10 = 1 + 2 + 3 + 4	20 = 1 + 3 + 6 + 10
5	15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5	35 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15
6	21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	56 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21
…	…	…
n	Variante 1: Summe der einzelnen Stufen bis zur n- ten Stufe Variante 2: $\sum_{i=1}^{n} n = n + (n-1) + (n-2) + ...1$ $= \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$	Variante 1: Summe der Kugeln in den einzelnen Stufen bis zur n-ten Stufe Variante 2: $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + ...1$ $= \sum_{1}^{n} \left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \right) = \sum_{1}^{n} \left(\frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{2} n \right)$ $= \frac{1}{2} \cdot \sum_{1}^{n} n^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{1}^{n} n$ $= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \right) +$ $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \right)$ $= \frac{1}{12} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) + \frac{1}{4} \cdot n \cdot (n+1)$ $= \frac{1}{12} \cdot n \cdot (n+1) \cdot [(2n+1) + 3]$ $= \frac{1}{12} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+4)$

Aufgabe 1.c)

$$220 = \frac{1}{12} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+4)$$

$$\frac{1}{12} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+4) - 220 = 0$$

Variante 1: „systematisches Testen“

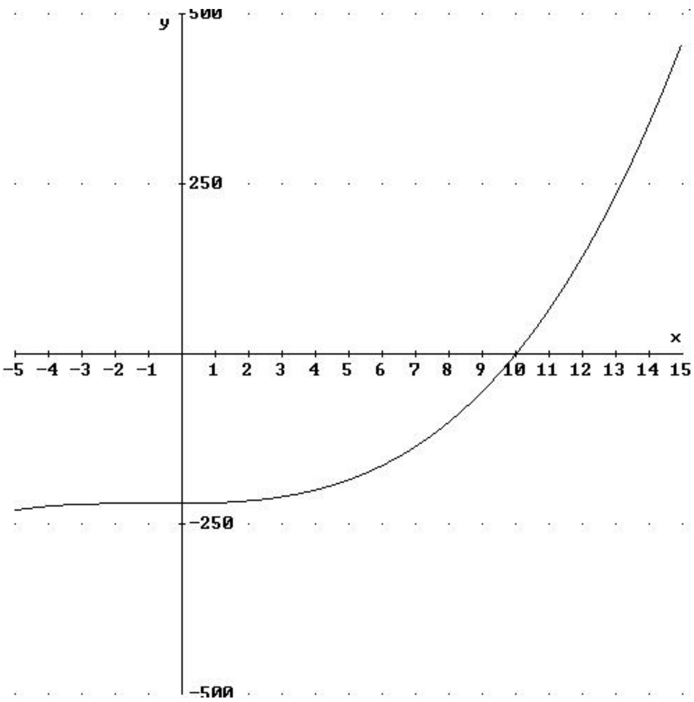
n = 8 $\Rightarrow$ $\frac{1}{12} \cdot 8 \cdot (8+1) \cdot (2 \cdot 8 + 4) = \frac{1}{12} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 20 = 120$

n = 10 $\Rightarrow$ $\frac{1}{12} \cdot 10 \cdot (10+1) \cdot (2 \cdot 10 + 4) = \frac{1}{12} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 24 = 220$

Die Kugelpyramide, die 220 Kugeln enthält, besitzt 10 Stufen!

Variante 2: „graphisch“

$$f(x) = \frac{1}{12} \cdot x \cdot (x+1) \cdot (2x+4) - 220$$

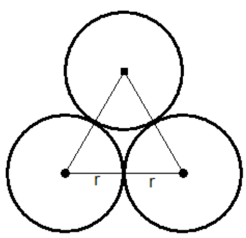


Die Nullstelle liegt bei (10/0). Die Kugelpyramide besitzt 10 Stufen!

Aufgabe 1.d)

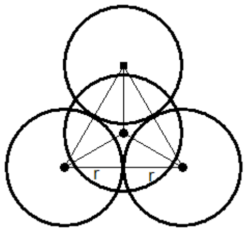
Schritt 1:

Die Verbindungslinien der drei Mittelpunkte bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 2 * r = 4 cm.

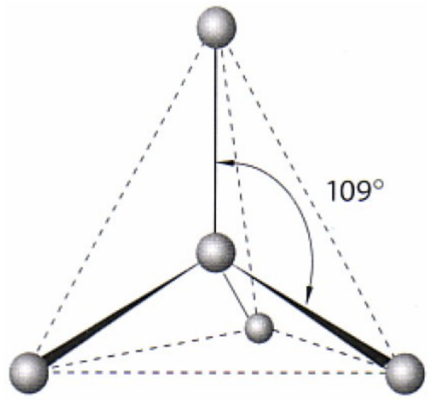


Schritt 2:

Wird nun die vierte Kugel auf jede der drei anderen gelegt, so kann man in der Abbildung erkennen, dass die Mittelpunkte der vier Kugeln einen regelmäßigen Tetraeder bilden.



Ein Tetraeder ist ein gleichmäßiger geometrischer Körper mit vier identischen, gleichseitigen Dreiecken. Im Tetraeder beträgt der Winkel vom Schwerpunkt des Tetraeders zu seinen beiden Eckpunkten (bzw. der Bindungswinkel) 109°.

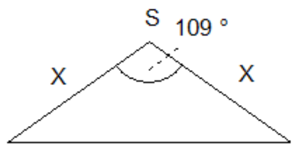


Schritt 3:

Der Mittelpunkt der großen Kugel muss aus Gründen der Symmetrie im Schwerpunkt des Tetraeders liegen!

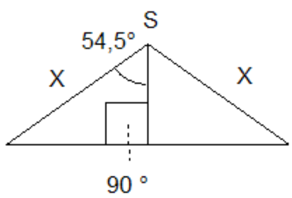
Schritt 4:

Betrachten wir uns nun das gleichschenklige Dreieck aus Schwerpunkt S und zwei Eckpunkten des Tetraeders.



Schritt 5:

Nun zerlegen wir das gleichschenklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke.



Schritt 6:

Berechnen der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks:

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{r}{x}$$

$$x = \frac{r}{\sin(\alpha)} = \frac{2cm}{\sin(54{,}5°)} = 2{,}46cm$$

Schritt 7:

Bestimmen des Radius der umhüllenden Kugel

$$R_{umhüllende\ \ Kugel} = x + r = 2{,}46cm + 2cm = 4{,}46cm$$

$$V_{umhüllende\ Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (R_{umhüllende\ Kugel})^3$$

$$V_{umhüllende\ Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (4{,}46cm)^3 = 371{,}61cm³$$