

Aufgabe 1: Die Pyramiden von Gizeh

Nach der so genannten Frühzeit (2850 - 2600 v. Chr.) setzte gleich als erster kultureller Höhepunkt der Bau der großen Pyramiden, welches Grabmäler der altägyptischen Könige (Pharaonen) sind, ein.

Am bekanntesten sind die rechts abgebildeten Pyramiden von Gizeh, die zu den sieben Weltwundern zählen. Beigesetzt sind hier die Könige Cheops, Chefren und Mykerinus.



Die größte, interessanteste und auch geheimnisvollste davon ist die Cheops-Pyramide (siehe Abbildung rechts), die um 2530 v. Chr. von König Cheops, einem der größten Pharaonen der 4. Dynastie, auf dem Kalkplateau von Gizeh, in der Nähe des heutigen Kairo, erbaut wurde.

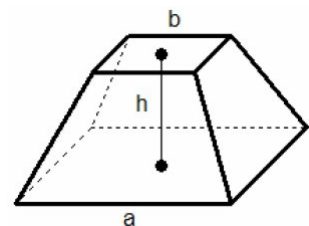


Stehst du neben ihr, dann kommst du dir wie eine Ameise vor einem Ameisenhaufen vor und wenn du um sie herum läufst, musst du ungefähr einen Weg von 921 Meter zurücklegen. Ihre Grundfläche ist so groß wie neun Fußballfelder und ihre einstige Höhe betrug 146,6 Meter. Heute sind das jedoch rund 10 Meter weniger, da in den letzten Jahrhunderten viele Steine verwittert sind oder für den Bau von Palästen und Moscheen gestohlen wurden.

- Welches Volumen besaß die Cheops-Pyramide ursprünglich? Fertige hierzu eine maßstabsgetreue Schrägbildzeichnung an!
- Welches Volumen besitzt die Cheops-Pyramide heute? Um wie viel Prozent hat das Volumen durch die Verwitterung und Räubereien abgenommen?
- Betrachte den nebenstehenden Pyramidenstumpf.

Wie kann ein Pyramidenstumpf mit zwei quadratischen Grundflächen in dir bekannte Teilkörper zerlegt werden? Skizziere die entstandenen Teilkörper einzeln als Schrägbild!

Kannst du nun eine allgemeine Formel für die Volumenberechnung dieses Pyramidenstumpfes in Abhängigkeit der beiden Grundseiten a und b und der Höhe h angeben?



Lösung:

Aufgabe 1.a)

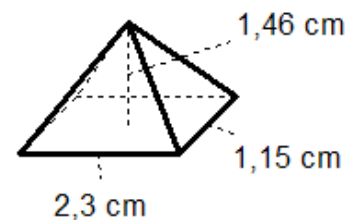
$$U = 921m = 4 \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = 230,25m$$

$$h = 146,6m$$

$$V_{\text{ursprünglich}} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = 2.590.669,39m^3$$

Das Volumen der Cheops- Pyramide betrug 2.590.669,39m³.

Eine mögliche Variante ist die Folgende im Maßstab 100m = 1cm:



Aufgabe 1.b)

Bei der heutigen Cheops-Pyramide handelt es sich nur noch um einen Pyramidenstumpf. In der Lösung der Frage 1 haben wir bereits das Volumen der ursprünglichen Pyramide berechnet. Subtrahieren wir nun die kleine Pyramide von der Ursprünglichen, so ergibt sich das gesuchte Volumen des Stumpfes.

Mit Hilfe des Strahlensatzes kann die Grundseite der kleinen Pyramide berechnet werden:

$$\frac{\frac{a}{2}}{h-10} = \frac{x}{10}$$

mit $a = 230,25m$ und $h = 146,6m$ folgt daraus:

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{2} = 10 \cdot \frac{\frac{a}{2}}{h-10} = 10m \cdot \frac{230,25m}{146,6m-10m} = 10m \cdot \frac{115,125m}{136,6m} = 8,43m$$

$$\Rightarrow \quad x = 8,43m \cdot 2 = 16,86m$$

$$V_{\text{klein}} = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 10 = 947,53m^3$$

$$V_{\text{heute}} = V_{\text{ursprünglich}} - V_{\text{klein}} = 2.589.721,86m^3$$

Die Cheops-Pyramide besitzt heute ein Volumen von 2.589.721,86m³.

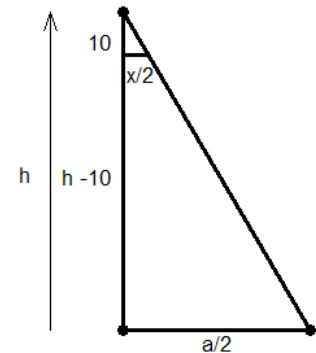
Mit Hilfe des Dreisatzes folgt nun:

$$2.589.721,86m^3 = 100\%$$

$$947,53m^3 = x\%$$

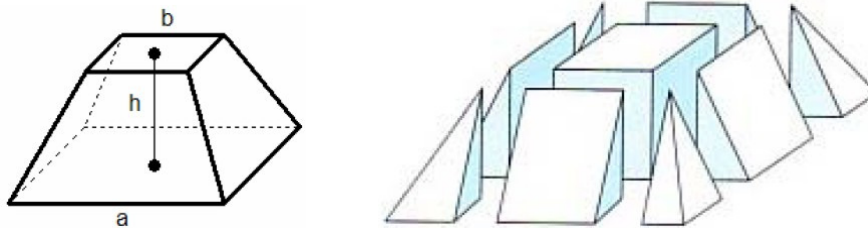
$$x = \frac{947,53m^3}{2.589.721,86m^3} \cdot 100\% = 0,04\%$$

Die Cheops- Pyramide ist noch zu 99,96% erhalten und 0,04% von ihr wurde durch Verwitterung und Räubereien abgetragen.



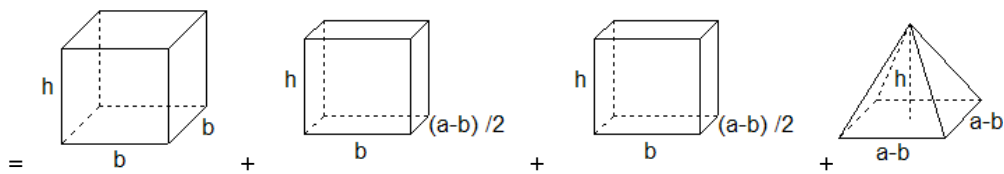
Aufgabe 1.c)

Ein Pyramidenstumpf kann wie folgt (siehe Abb.34 und Abb.35) in bekannte Teile zerlegt werden:



$$V = V_{\text{QuaderMitte}} + V_{\text{QuaderAußen}} + V_{\text{PyramideEckteile}}$$

Zerlegung des Pyramidenstumpfes:



Allgemeine Formel für die Volumenberechnung dieses Pyramidenstumpfes:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{QuaderMitte}} + V_{\text{QuaderAußen}} + V_{\text{PyramideEckteile}} \\ &= b^2 \cdot h + 2 \cdot \frac{a-b}{2} \cdot b \cdot h + \frac{1}{3} \cdot (a-b)^2 \cdot h \\ &= b^2 \cdot h + a \cdot b \cdot h - b^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot (a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2) \cdot h \\ &= b^2 \cdot h + a \cdot b \cdot h - b^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h - \frac{2}{3} \cdot a \cdot b \cdot h + \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot a \cdot b \cdot h + \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} h \cdot (b^2 + a \cdot b + a^2) \\ &= \frac{1}{3} \cdot h \cdot (G_{\text{groß}} + \sqrt{G_{\text{groß}} \cdot G_{\text{klein}}} + G_{\text{klein}}) \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Stufenpyramide

Die „Schule auf der Aue“ möchte auf ihrem Pausenhof eine Sitzgelegenheit für ihre Schüler/innen schaffen. Diese soll möglichst wenig Platz des Pausenhofs in Anspruch nehmen, jedoch möglichst viele Sitzplätze für alle bereitstellen.

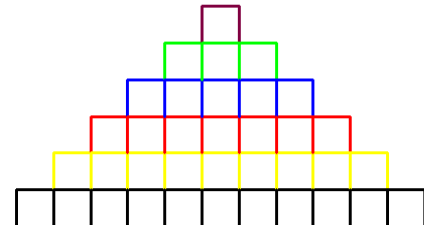
Der Architekt Herr Ludwig, der durch die Besichtigung der Pyramiden von Gizeh in seinem Ägypten-Urlaub inspiriert wurde, rät der Schule den Bau einer quadratischen Stufenpyramide aus Leichtbeton.

- a) Wie viele Steine werden für das Stapeln einer sechsstufigen Pyramide benötigt? Und wie viele Schüler/innen können mindestens auf ihr sitzen? Hinweis: Ein Stein soll einem Sitzplatz entsprechen.

- b) Welche Maße sollte ein Steinquader besitzen, damit ein Mensch darauf bequem sitzen kann?

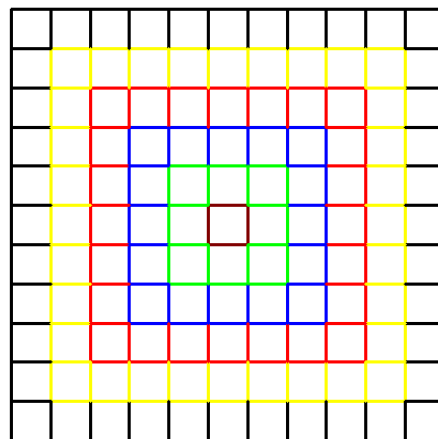
- c) Ein m^3 Leichtbeton kostet 97,80 €. Mit welchen Materialkosten muss die Schule bei dem Bau der Pyramide rechnen?

- d) Ist Herrn Ludwigs Urlaubsinspiration sinnvoll oder gibt es noch eine bessere Möglichkeit, bei der die Steine auf der gleichen Grundfläche anders angeordnet werden, so dass mehr Schüler/innen darauf Platz finden? Notiere deine Argumente!

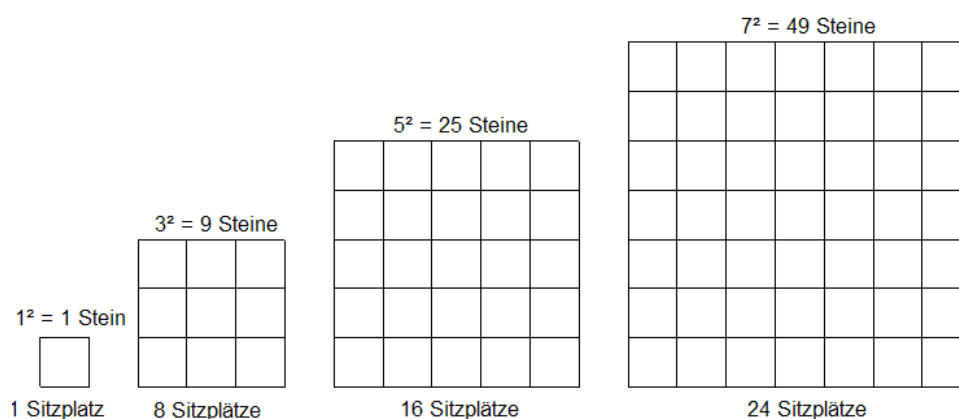


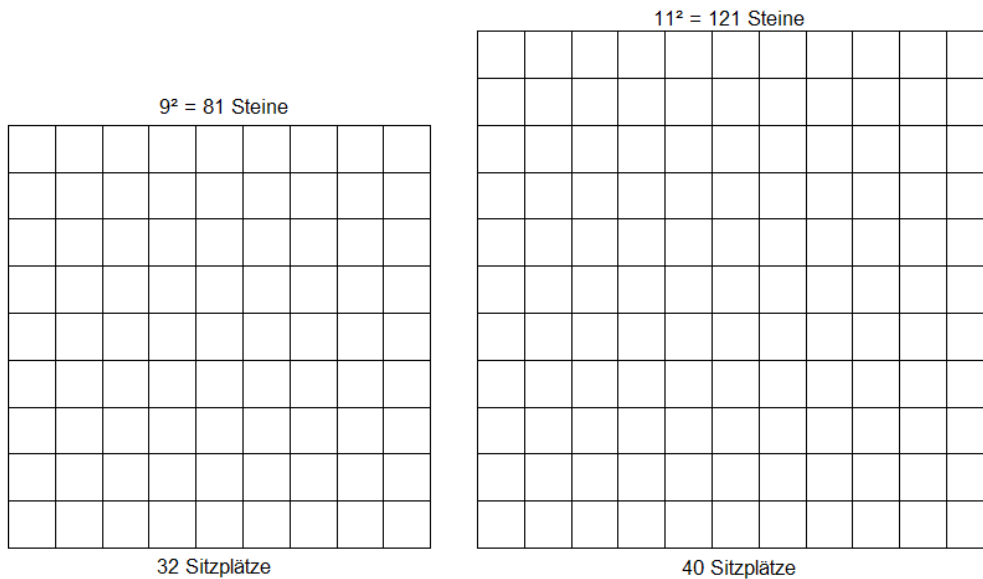
Lösung:

Der Grundriss einer sechsstufigen Pyramide:



Die einzelnen Steinschichten einer sechsstufigen Pyramide:





Aufgabe 2.a)

Die sechsstufige Pyramide besitzt

$$1 + 9 + 25 + 49 + 81 + 121 = 286 \text{ Steine.}$$

Auf ihr können mindestens

$$1 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 = 121 \text{ Menschen sitzen.}$$

Aufgabe 2.b)

Eine mögliche Lösungsvariante ist die Folgende: Ein Steinquader besitzt eine Grundfläche von $0,36 \text{ m}^2$ ($a = 0,6 \text{ m}$) und eine Höhe von 40 cm .

Begründung: Auf der Sitzfläche sollte sowohl Platz zum Sitzen als auch für die Füße des Sitzenden darüber sein. Daraus folgt, dass der Stein mindestens 60 cm breit sein sollte.

Aufgabe 2.c)

Ein Stein besitzt ein Volumen von $V_{\text{Stein}} = a^2 \cdot h = 0,144 \text{ m}^3$.

Das Gesamtvolumen der 286 Steine beträgt $V = 286 \cdot V_{\text{Stein}} = 41,184 \text{ m}^3$.

Die Materialkosten betragen somit $K = 41,184 \text{ m}^3 \cdot 97,80 \text{ €} = 4.027,80 \text{ €}$.

Aufgabe 2.d)

Herrn Ludwigs Inspiration ist die beste Lösung, da sie die meisten Sitzplätze für die Schüler und Schülerinnen bietet. Es wäre aber denkbar, die Stufenzahl der Sitzpyramide zu erhöhen. Hierbei muss jedoch beachtet werden, dass aufgrund der steigenden Verletzungsgefahr mit steigender Höhe eine gewisse Höhe der Pyramide nicht überschritten werden darf.

Aufgabe 3: Ferrero Küsschen

Zu Weihnachten soll eine Sonderverpackung für Ferrero Küsschen angefertigt werden. Diese soll die Form einer Pyramide besitzen und zwischen 30 und 40 Ferrero Küsschen beinhalten. Welche Maße könnte diese Verpackung besitzen? Argumentiere sinnvoll! Erarbeite jedoch zunächst Fragen, die sich bei der obigen Problemstellung ergeben können!

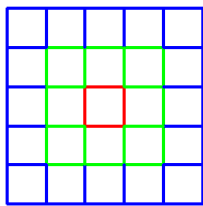


Zusatz: Diskutiere die Vor- und Nachteile der Sonderverpackung im Vergleich zur herkömmlichen Verpackung (Prisma mit einer sechseckigen Grundfläche und 28 Ferrero Küsschen)!

Lösung:

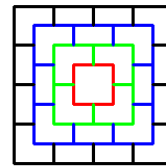
Klären der folgenden Fragen:

- Welche Form hat die Verpackung? (in unserem Fall nun eine Pyramide)
- Wie viel Gramm Schokolade/Ferrero Küsschen soll die Verpackung beinhalten? (zwischen 30 und 40 Ferrero Küsschen)
- Welche Maße besitzt ein Ferrero Küsschen? ($h \sim 1,5\text{cm}$ und $b \sim 2,5\text{cm}$)
- Wie sollen die Ferrero Küsschen in der Verpackung angeordnet werden? (Die beiden sinnvollsten Anordnungen sind die Folgenden!)



Pyramide 1 (Draufsicht)

$1 + 9 + 25 = 35$ Ferrero Küsschen
größere Grundfläche als Pyramide 2
niedrigere Höhe als Pyramide 2



Pyramide 2 (Draufsicht)

$1 + 4 + 9 + 16 = 30$ Ferrero Küsschen
kleinere Grundfläche als Pyramide 1
höhere Höhe als Pyramide 1

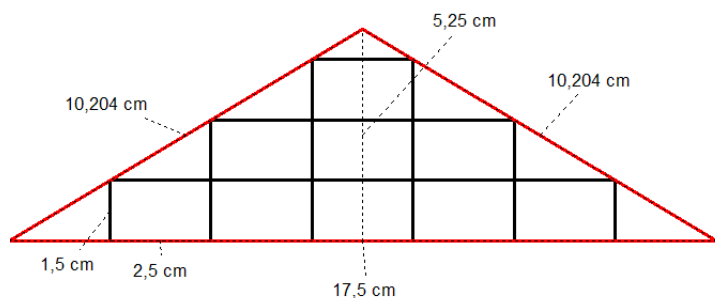
Welche der beiden Anordnungen ist sinnvoller? Begründe!
Und welche Maße folgen dann für die Verpackungspyramide?

Pyramide 1:

Höhe der Verpackung = 5,25 cm

Breite der Verpackung = 17,5 cm

Um die Oberfläche der Pyramide 1 berechnen zu können, müssen wir zunächst die Höhe der Dreiecke mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen!



$$h_{\text{Dreieck}}^2 = h_{\text{Pyramide}}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (5,25\text{cm})^2 + \left(\frac{17,5\text{cm}}{2}\right)^2 = 104,125\text{cm}^2$$

$$h_{\text{Dreieck}} = \sqrt{104,125\text{cm}^2} = 10,2\text{cm}$$

$$O_{\text{Pyramide 1}} = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_{\text{Dreieck}} = (17,5\text{cm})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 17,5\text{cm} \cdot 10,2\text{cm} = 663,25\text{cm}^2$$

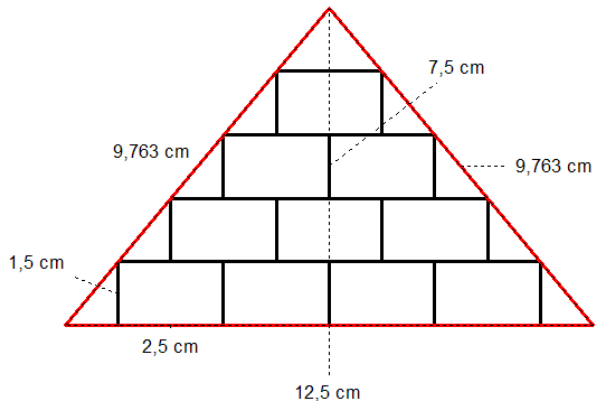
$$V_{\text{Pyramide 1}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (17,5\text{cm})^2 \cdot 5,25\text{cm} = 535,94\text{cm}^3$$

Pyramide 2:

Höhe der Verpackung = 7,5 cm

Breite der Verpackung = 12,5 cm

Auch bei Pyramide 2 müssen wir, bevor wir die Oberfläche berechnen können, zunächst die Höhe der Dreiecke mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen!



$$h_{\text{Dreieck}}^2 = h_{\text{Pyramide}}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (7,5\text{cm})^2 + \left(\frac{12,5\text{cm}}{2}\right)^2 = 95,31\text{cm}^2$$

$$h_{\text{Dreieck}} = \sqrt{95,31\text{cm}^2} = 9,76\text{cm}$$

$$O_{\text{Pyramide 2}} = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_{\text{Dreieck}} = (12,5\text{cm})^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 12,5\text{cm} \cdot 9,76\text{cm} = 400,25\text{cm}^2$$

$$V_{\text{Pyramide 2}} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (12,5\text{cm})^2 \cdot 7,5\text{cm} = 390,63\text{cm}^3$$

Pyramide 2 ist die sinnvollere Verpackung, da sie einen geringeren Materialverbrauch¹ aufweist ($O_{\text{Pyramide 2}} < O_{\text{Pyramide 1}}$), die Verpackung das kleinere Volumen² besitzt ($V_{\text{Pyramide 2}} < V_{\text{Pyramide 1}}$) und sie zudem optisch ansprechender ist!

Zusatz:

Analoges Vorgehen wie oben! (28 Ferrero Küsschen in zwei Schichten) Berechne den Oberflächeninhalt und das Volumen der herkömmlichen Verpackung. Tipp: Zerlege die Grundfläche des Prismas in sechs gleichschenklige Dreiecke.

Vergleiche und interpretiere abschließend deine Ergebnisse mit der Oberfläche und dem Volumen der Pyramide 2!

¹ Je geringer der Materialverbrauch einer Verpackung ist, desto kostengünstiger ist es, sie zu produzieren.

² Je kleiner das Verpackungsvolumen einer Verpackung ist, desto kostengünstiger ist es, sie zu transportieren, da mehr Verpackungen in einer Fracht befördert werden können.