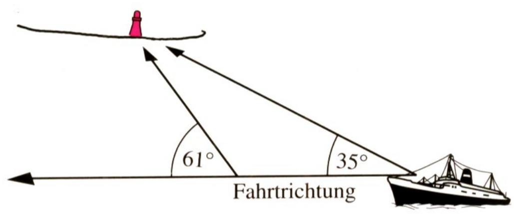
<u>Aufgabe 1:</u> Leuchtturm

Der Kapitän eines Schiffes muss laut seinen Karten beim Passieren einer Landzunge einen bestimmten Abstand zum Festland einhalten, um nicht auf ein Riff aufzulaufen. Dazu peilt er den Leuchtturm unter einem Winkel von 35° an. Nach 5,8 sm ergibt eine erneute Peilung 61°. Wie weit ist das Schiff bei der 2. Peilung vom Leuchtturm entfernt?



Lösung:

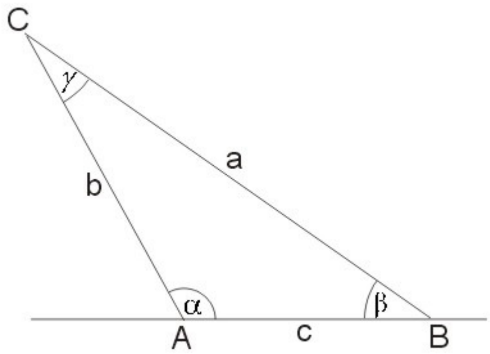
Variante 1: Sinussatz

$\alpha = 90° - 61° = 119°$

$\beta = 35°$

$\gamma = 180° - 119° - 35° = 26°$

$c = 5{,}8$ sm



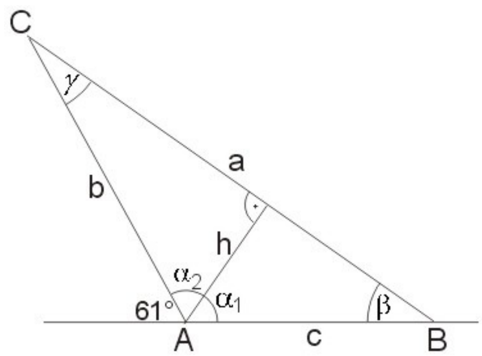
$$\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$b = c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = 5{,}8sm \cdot \frac{\sin 35°}{\sin 26°} = 7{,}59sm$$

Variante 2: Zerlegung in rechtwinklige Dreiecke

$\alpha_1 = 90° - 35° = 55°$

$\alpha_2 = 180° - 61° - \alpha 1 = 64°$



$$\sin(\beta) = \frac{h}{c}$$

$$\Leftrightarrow \; h = c \cdot \sin(\beta) = 5{,}8sm \cdot \sin(35°) = 3{,}327sm$$

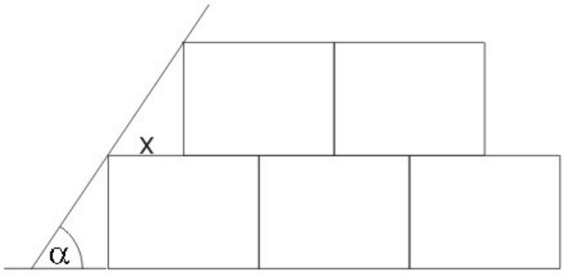
$$\cos(\alpha_2) = \frac{h}{b}$$

$$\Leftrightarrow \; b = \frac{h}{\cos(\alpha_2)} = \frac{3{,}327sm}{\cos(64°)} = 7{,}59sm$$

<u>Aufgabe 2:</u> Pyramiden

Die ägyptischen Pyramiden wurden schichtweise aus großen Kalksteinquadern gebaut. Der Neigungswinkel α aller vier Seiten ist immer gleich und beträgt z. B. bei der um 2500 v. Chr. erbauten Cheopspyramide ca. 54° (siehe Abbildung rechts). Durch Vorschreiben eines bestimmten Einrückungsmaßes x der nächsthöheren Quaderschicht konnten die Erbauer den Winkel einhalten, obwohl sie noch kein Winkelmaß kannten.

Es soll eine Pyramide mit einer Breite von 360 Ellen und einer Höhe von 252 Ellen gebaut werden. Bestimme das Einrückungsmaß x der jeweils nächsten Quaderreihe in Handbreiten, wenn ein Quader 3 Ellen hoch ist und eine 1 Elle genau 7 Handbreiten besitzt!



Lösung:

Für den Winkel α gilt:

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{\frac{1}{2}b} = \frac{252\text{ Ellen}}{180\text{ Ellen}} = \frac{25{,}2}{18}$$

Daraus folgt für das Einrückungsmaß x in Handbreiten:

$$\tan(\alpha) = \frac{h_{Quader}}{x} = \frac{3\text{ Ellen}}{\text{x}}$$

$$x = \frac{3\text{ Ellen}}{\tan(\alpha)} = 3\text{ Ellen} \cdot \frac{18}{25{,}2} = 2{,}1429\text{ Ellen}$$

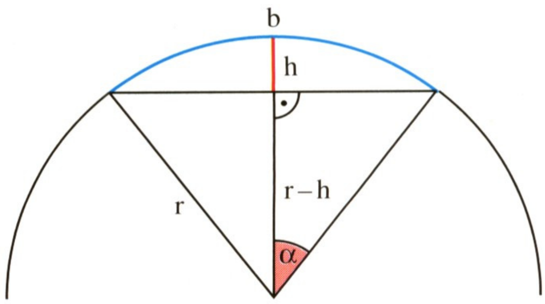
Da eine Elle 7 Handbreiten besitzt gilt:

$$1\text{ Handbreit} = \frac{1\text{ Elle}}{1\text{ Handbreit}} = 0{,}1429$$

$$x = 2{,}1429\text{ Ellen} = 2\text{ Ellen und }1\text{ Handbreit}$$

Aufgabe 3: Bodensee

Der Bodensee ist b = 64 km lang. Wie viel m steht das Wasser in der Mitte des Sees höher als an den Enden?



Lösung:

$$r = 6371km$$

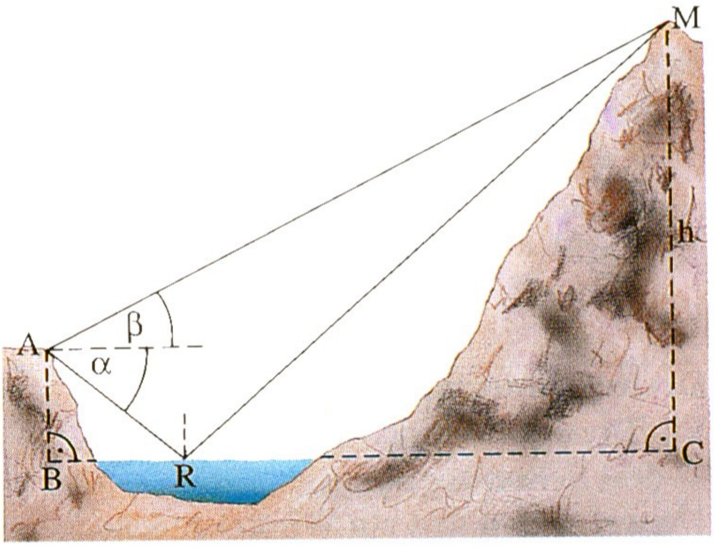
$$b = 2\alpha \cdot \frac{\pi}{180°} \cdot r \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{b}{2 \cdot r} \cdot \frac{180°}{\pi} = \frac{64km}{2 \cdot 6371km} \cdot \frac{180°}{\pi} = 0{,}287783°$$

$$\cos(\alpha) = \frac{r-h}{r} \quad \Leftrightarrow \quad r - h = r \cdot \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad h = r \cdot (1 - \cos(\alpha)) = 0{,}080364km = 80{,}364m$$

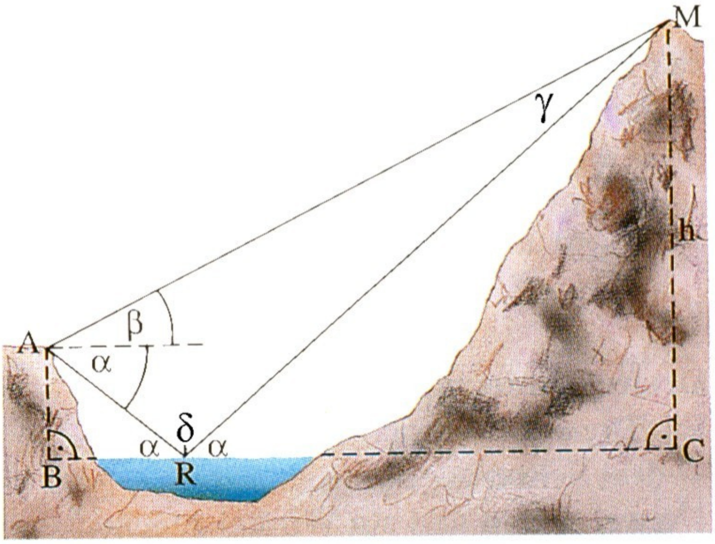
In der Mitte des Sees steht das Wasser ca. 80,36 m höher als an den Rändern.

<u>Aufgabe 4:</u> Matterhorn

Blickt man von einem 120 m über dem Riffelsee (bei Zermatt/Schweiz) gelegenen Punkt A bei Windstille in den See, so sieht man das Spiegelbild des Matterhorns unter einem Tiefenwinkel von $\alpha = 11{,}8°$. Die Spitze des Matterhorn erblickt man direkt unter dem Höhenwinkel $\beta = 10{,}25°$. Wie viel Meter liegt der Gipfel des Matterhorn über dem Riffelsee?



Lösung:



$$\overline{AR} = \frac{h_{See}}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{120m}{\cos(78{,}2°)} = 586{,}81m$$

$$\delta = 180° - 2 \cdot \alpha = 156{,}4°$$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta - \delta = 1{,}55°$$

$$\overline{RM} = \overline{AR} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\gamma)} = 586{,}81m \cdot \frac{\sin(22{,}05°)}{\sin(1{,}55°)} = 8144{,}30m$$

$$h = \overline{RM} \cdot \sin(\alpha) = 8144{,}3m \cdot \sin(11{,}8°) = 1665{,}48m$$

Der Gipfel des Matterhorns liegt 1665,48 m über dem See.

<u>Aufgabe 5:</u> Schüttkegel

Auf einer Baustelle wird Sand, der als Füllmaterial benötigt wird, in acht 1,75 m hohen zylinderförmigen Behältern mit jeweils 1,5 m Durchmesser angeliefert. Der Sand wird langsam über ein Förderband ausgekippt, so dass ein kegelförmiger Haufen entsteht. Der Vorarbeiter hat den Verdacht, dass die Lieferfirma betrogen hat und die Behälter nicht ganz voll waren. Er beauftragt seinen schlauen Lehrling das zu überprüfen. Dieser misst Umfang (U = 17,5 m) und Seitenkante des Kegels.

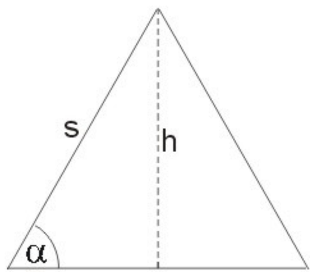
Der schlaue Lehrling weiß: Der Schüttwinkel für Sand ist 40°. Um zu überprüfen, ob die Behälter voll waren, misst er die Seitenkante. Wie lang müsste die Seitenkante s sein, wenn die Behälter voll waren? Hinweis: Der Schüttwinkel ist der Winkel, den Grundfläche und Seitenkante des Schüttkegels einschließen.

Lösung:

Das Gesamtvolumen des angelieferten Sandes beträgt

$$V_{ges} = 8 \cdot \pi \cdot (0{,}75m)^2 \cdot 1{,}75m = 24{,}74m^3 = 24.740dm^3 .$$

Aus der informativen Figur entnimmt man $\cos(\alpha) = \frac{r}{s}$ und $\sin(\alpha) = \frac{h}{s}$.



Mit der Volumenformel für den Kegel folgt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot s^3 \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \sin(\alpha)$$

$$s = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{V}{\pi \cdot \cos^2(\alpha) \cdot \sin(\alpha)}}$$

$$s = \sqrt[3]{3 \cdot \frac{24{,}74m^3}{\pi \cdot \cos^2(40°) \cdot \sin(40°)}} = 3{,}97m$$

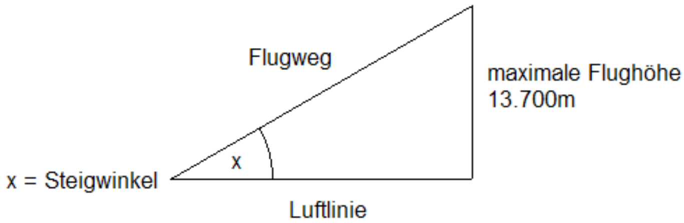
Aufgabe 6: **Boeing 747**

Die Boeing 747 ist eines der größten und stärksten Verkehrsflugzeuge der Welt. Sie kann mit einer Höchstgeschwindigkeit von 920 km/h fliegen. Bei ihrem Startweg besitzt sie jedoch aufgrund des hohen Luftwiderstands nur eine durchschnittliche Geschwindigkeit von circa 250 km/h. Nach ungefähr 8 Minuten hat sie ihre maximale Flughöhe von 13.700 m erreicht.

Wie viele Kilometer legt sie zurück, um ihre maximale Höhe zu erreichen? Wie viele Kilometer fliegt sie jedoch nur Luftlinie? Welchen mittleren Steigwinkel besitzt eine Boeing 747?

Lösung:

Das Flugzeug fliegt 8 Minuten (8*60 s = 480 s) mit einer Geschwindigkeit von 250 km/h, um seine maximale Flughöhe von 13.700 m zu erreichen.



$$250 \cdot \frac{1000m}{3600s} = 69{,}44 \frac{m}{s}$$

$$Flugweg = Geschwindigkeit \cdot Flugzeit$$

$$Flugweg = 69{,}44 \frac{m}{s} \cdot 480s = 33.331{,}2m = 33{,}3km$$

Der Luftlinie-Weg kann mit dem Satz des Pythagoras berechnet werden.

$$Flugweg^2 = Luftlinienweg^2 + Flughöhe^2$$

$$Luftlinienweg = \sqrt{Flugweg^2 - Flughöhe^2} = \sqrt{33.331{,}2^2 - 13.700^2}\, m = 30.385{,}5m$$

Der mittlere Steigwinkel ergibt sich aus:

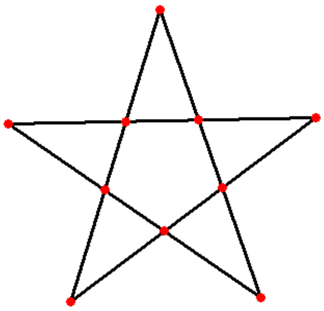
$$\sin(\alpha) = \frac{Flughöhe}{Flugweg} = \frac{13.700m}{33.331{,}2m} \qquad \Leftrightarrow \qquad \alpha = \arcsin\left(\frac{13.700}{33.331{,}2}\right) = 24{,}3°$$

Aufgabe 7: Hobbygärtner Willi

Der Hobbygärtner Willi findet die Bepflanzung in seinem Garten ziemlich langweilig und möchte deshalb etwas Extravagantes ausprobieren! Er setzt sich in den Kopf, seine zehn Apfelbäume so umzupflanzen, dass sich genau fünf Reihen mit jeweils vier Bäumen ergeben. Er weiß jedoch nicht, wie er seine „fixe" Idee verwirklichen soll! Kannst du ihm da weiterhelfen?

Bei der Einpflanzung von Bäumen, die mit den Jahren eine große Baumkrone entwickeln, ist es sinnvoll, darauf zu achten, immer einen Mindestabstand von 8 Meter zum nächsten Baum einzuhalten, damit sie sich ungehindert ausweiten können! Wie viel m² Gartenfläche nimmt demzufolge die oben beschriebene Anordnung der Bäume in Anspruch?

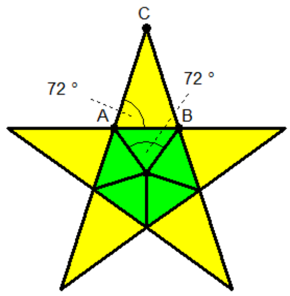
Lösung:



Um mit zehn Bäumen fünf Reihen mit jeweils vier Bäumen zu erhalten, müssen diese wie nebenstehend dargestellt angeordnet werden. Hierbei stellen die roten Punkte die Bäume und die schwarzen Linien die Reihen dar!

Für die Flächenberechnung des Sterns ist es sinnvoll, den Stern in fünf kongruente große Dreiecke (gelb) und in fünf kongruente kleine Dreiecke (grün) zu zerlegen.

$$A_{Stern} = 5 \cdot A_{Dreieck\ klein} + 5 \cdot A_{Dreieck\ groß}$$



Strecke $\overline{AB}$ = 8m

Winkel AMB = 72°

Winkel MAB = Winkel ABM = 54° ((180°-72°)/2)

Winkel ACB = 72° (=180°- 2* 54°)

Um die Fläche des kleinen Dreiecks zu berechnen, wird das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt und im Anschluss daran die Höhe mit Hilfe des Tangens berechnet.

$$\tan(36°) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{4m}{h_{Dreieck\ klein}} \quad \Leftrightarrow \quad h_{Dreieck\ klein} = 5{,}51m$$

$$A_{Dreieck\ klein} = \frac{1}{2} \cdot 8m \cdot h_{Dreieck\ klein} = 22{,}04m^2$$

Analog dazu wird die Fläche des großen Dreiecks berechnet, indem das gleichseitige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt und die Höhe mit Hilfe des Tangens berechnet wird.

$$\tan(72°) = \frac{h_{Dreieck\ groß}}{4m} \quad \Leftrightarrow \quad h_{Dreieck\ groß} = 12{,}31m$$

$$A_{Dreieck\ groß} = \frac{1}{2} \cdot 8m \cdot h_{Dreieck\ groß} = 49{,}24m^2$$

Die Fläche des gesamten Sterns ergibt sich somit zu:

$$A_{Stern} = 5 \cdot A_{Dreieck\ klein} + 5 \cdot A_{Dreieck\ groß} = 5 \cdot 22{,}04m^2 + 5 \cdot 49{,}24m^2 = 356{,}4m^2$$