<u>Aufgabe 1:</u> Rechenvorteil

Rechne vorteilhaft!

199 + 150 + 188 + 12 + 50 + 1 =

Lösungsmöglichkeit:

Erkennt man aufgrund von Symmetrieüberlegungen, dass die erste und letzte, zweite und zweitletzte und die beiden mittleren Zahlen addiert jeweils 200 ergeben, lässt sich das Ergebnis schnell berechnen.

$$\overbrace{199 + \overbrace{150 + \overbrace{188 + 12}^{200} + 50}^{200} + 1}^{200} = \mathbf{600}$$

<u>Aufgabe 2:</u> Die Geburtstagsparty

Jana hat bald Geburtstag und möchte mit ihren Freunden eine Party feiern. Schon vor ein paar Tagen hat sie die Einladungen an ihre Klassenkameraden verteilt. Zugesagt haben 5 Mädchen und 4 Jungs, außerdem werden noch Janas Bruder und ihre Freundin Anna dabei sein.

Um den Kuchen und Kakao kümmert sich Janas Mutter. Weil Jana aber unbedingt eine Übernachtungsparty wollte, soll sie sich nun um das Abendessen, Getränke und um Knabberzeug kümmern.

Gemeinsam mit ihrer besten Freundin Anna plant sie nun den Ablauf und schreibt auf, was sie besorgen müssen. Danach schauen die beiden im Prospekt eines Supermarktes nach Angeboten und rechnen aus, wie viel Geld sie brauchen.

Angebote der Woche:

Wiener Würstchen Paar	0,49 €
Ritter Sport 100g Tafel	0,55 €
Chips 200g Beutel	0,95 €
O-Saft 6 x 1 Liter	4,99 €
A-Saft Literflasche	0,90 €
Zitronenlimonade 0,75l	0,40 €
Äpfel kg	0,59 €
Salzstangen 4x 100g	0,99 €
Duschgel 200 ml	1,99 €
Kartoffeln 2 kg	0,70 €
Gummibärchen 200g	1,20 €
Fertigpizza 325g	1,89 €

Einkaufsliste:

6kg Kartoffeln
2 Würstchen pro P.
½l A-Saft pro P.
1 Pack O-Saft (6F)
1 Flasche Limo pro P.
5 Tafeln Schokolade
Salzstangen (Pack)
4 Tüten Gummibärchen
5 Tüten Chips

Lösungsmöglichkeit:

Die bei dieser Aufgabe durchgängig verwendete heuristische Strategie, ist die des Vorwärtsarbeitens.

Egal, ob vorgegeben oder vom Schüler selbst formuliert, es stellt sich zu Beginn die Frage, wie viele Kinder an der Party teilnehmen.

Die Anzahl ergibt sich aus den 4 Jungen und 5 Mädchen, die zugesagt haben, dem Bruder, Anna und Jana selbst ➔ Es werden 12 Kinder an der Party teilnehmen.

Mit Hilfe dieser Angabe lassen sich die insgesamt benötigten Apfelsaft- und Limomengen, die auf der Einkaufsliste pro Person angegeben sind, berechnen.

Danach müssen die Preise der einzelnen Lebensmittel ausgerechnet und zum Schluss aufaddiert werden.

Der Übersichtlichkeit halber empfiehlt es sich, die Angaben in eine Tabelle einzutragen.

Artikel	Menge	Preis	
6 kg Kartoffeln	3 · 2 kg	3 · 70 Cent	2,10 €
2 Würstchen pro Person	24 St = 12 Paar	12 · 49 Cent	5,88 €
½ l A-Saft pro Person	6 Flaschen	6 · 90 Cent	5,40 €
1 Pack O-Saft	6 x 1 Liter	4,99 Euro	4,99 €
0,75 l Limo pro Person	12 Flaschen	12 · 40 Cent	4,80 €
5 Tafeln Schokolade	5 · 100g	5 · 55 Cent	2,75 €
Salzstangen	4 x 100g	99 Cent	0,99 €
4 Tüten Gummibärchen	4 · 200g	4 · 1,20 Euro	4,80 €
5 Tüten Chips	5 · 200g	5 · 95 Cent	4,75 €
Gesamtkosten			36,46 €

Mit Hilfe dieser Tabelle lässt sich errechnen, dass Jana und Anna 36,46 € für ihren Einkauf brauchen werden.

<u>Aufgabe 3:</u> Zahlengruppe

Gegeben ist eine Gruppe von Zahlen: 13, 8, 11, 15, 7. Sie sollen durch Rechenoperationen miteinander verbunden werden.

(1) Durch Multiplikation der Zahlen miteinander erhält man als Ergebniszahl 50.

(1) Durch die Addition von drei dieser Zahlen erhält man die Zahl 40.

Lösbar ist

a) nur (1).

b) nur (2).

c) (1) und (2) zusammen.

d) sowohl (1) als auch (2).

e) weder (1) noch (2).

Lösungsmöglichkeit:

Aussage e), also weder (1) noch (2) ist richtig.

Denn mit Hilfe des Extremalprinzips folgt, wenn man für Aussage (1) die beiden kleinsten Zahlen 7 und 8 auswählt, dass bereits deren Produkt größer als 50 ist.

In Aussage (2) soll die Summe dreier Zahlen 40 ergeben. Addiert man die drei größten Zahlen, 11, 13, 15 erhält man eine Summe die kleiner 40 ist. Demnach ist auch diese Aussage nicht zu erfüllen.

<u>Aufgabe 4:</u> Additionsspiel

Spiele mit Deinem Nachbarn:

Einer der beiden Spieler nennt eine Zahl zwischen 1 und 10. Jeder der beiden Spieler muss anschließend abwechselnd eine der Zahlen 1, 2 oder 3 dazu addieren. Wer zuerst die Zahl 50 genau erreicht, hat gewonnen. Wie muss man die Zahlen wählen, um zu gewinnen?[1]

---

[1] Aus Elemente 5. S.53, Nr.16.

Lösungsmöglichkeit:

Haben die Schüler die Strategie des Rückwärtsarbeitens bereits kennengelernt, sollten sie bei diesem Spiel möglichst eigenständig auf die Idee kommen, ebenfalls vom Gesuchten auszugehen.

Es stellt sich also die Frage, welche Zahl der betrachtete Spieler in der vorletzten Runde nennen muss, damit er in der letzten Runde die Zahl 50 genau erreichen kann. Analog arbeiten sich die Schüler nun jeweils eine Runde zurück, bis sie bei der ersten „Siegerzahl" angekommen sind. Sie könnten diese Überlegungen zum Beispiel in einer Tabelle festhalten, in der sie nach „Sieger-" und „Verliererzahlen" unterscheiden.

Siegerzahlen	Verliererzahlen
	1
2	3-5
6	7-9
10	11-13
14	15-17
18	19-21
22	23-25
26	27-29
30	31-33
34	35-37
38	39-41
42	43-45
46	47-49
50	

<u>Aufgabe 5:</u> Streichholzspiel

Auf dem Tisch liegen 30 Streichhölzer. Die beiden Spieler nehmen nacheinander bis zu vier Streichhölzer auf einmal weg. Wer das letzte Streichholz nimmt, hat gewonnen. Wie muss man vorgehen, um zu gewinnen?[2]

---

[2] Aus Elemente 5. S.65, Nr.32.

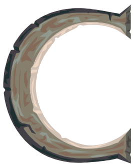
Lösungsmöglichkeit:

Diese Aufgabe ist analog zur Aufgabe „Additionsspiel" rückwärts zu bearbeiten.

Von der Gewinnzahl 1 aus werden alle übrigen Zahlen in Sieger- und Verliererzahlen eingeteilt. Dabei zeigt sich, dass die Person, die das Spiel beginnt schon verloren hat, weil der Gegner immer dafür sorgen kann, dass sie auf eine der Verliererzahlen kommt.

Verliererzahlen		5	10	15	20	25	30
Siegerzahlen	1 - 4	6 - 9	11 - 14	16 - 19	21 - 24	26 - 29	

<u>Aufgabe 6:</u> Einhundert gewinnt!



Gegeben sind die Zahlen **1 2 3 4 5 6 7 8 9**. Du darfst ihre Reihenfolge nicht ändern. Verbinde die Zahlen nun so durch die Rechenzeichen **+ - · :**, dass das Ergebnis der Rechnung 100 ergibt.

Lösungsmöglichkeit:

In erster Linie dient diese Aufgabe dazu, die Flexibilität und Kreativität der Schüler im Umgang mit Zahlen zu fördern. Sie müssen auf eine von sonst üblichen Aufgabenstellungen abweichende Art die vier Grundrechenarten so auf vorgegebene Zahlen anwenden, dass das Ergebnis der entstandenen Rechenoperationen 100 ergibt.

Durch systematisches Probieren, das Ausnutzen bestimmter Symmetrien und durch über die Aufgabenstellung hinausgehende Ideen, wie zum Beispiel das Interpretieren zweier nebeneinander stehender Ziffern als zweistellige Zahl, können die Schüler zu unterschiedlichen Lösungen gelangen.

Zur näheren Betrachtung sollen hier zwei mögliche Lösungen vorgestellt werden.

1 • (2 + 3) • 4 • 5 - 6 + 7 + 8 - 9 = 100

Diese Lösung nutzt das Symmetrieprinzip, indem die Gleichheit von 6+9=15 und 7+8=15 dahingehend eingesetzt wird, dass sie sich gegenseitig aufheben. Die Zahl

100 ist bereits im vierten Schritt bei 1 • (2 + 3) • 4 • 5 erreicht und durch das Addieren und Subtrahieren von 15 erhalten worden.

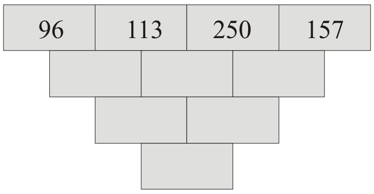
(12 - 3) • 4 + 5 - 6 - 7 + 8 • 9 = 100

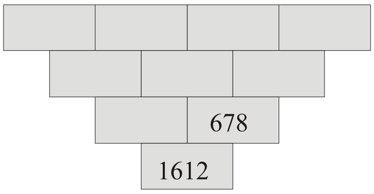
Hier wurde die Möglichkeit gewählt, zwei Ziffern ohne Rechenzeichen zu verbinden und somit zu einer zweistelligen Zahl zu gelangen. Entwickelt wurde diese Lösung ausgehend von den letzten beiden Ziffern. Durch deren Multiplikation erhält man die Zahl 72. Um die Zahl 100 zu erreichen, fehlen noch 28. Nun betrachtet man die verbliebenen Ziffern und versucht, 28 zu erzeugen. Man stößt nach einigen Versuchen auf (12 - 3) • 4 + 5 - 6 - 7.

<u>Aufgabe 7:</u> Additionsmauern

Eine Additionsmauer funktioniert so: Addiert man zwei nebeneinander stehende Zahlen, so erhält man die Zahl für den darunter liegenden Mauerstein.

a) Vervollständige die beiden Zahlenmauern.





b) Welche heuristische Strategie hast Du jeweils angewendet?

c) Wie könnte eine Additionsmauer zum kombinierten Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten aussehen?

Lösungsmöglichkeit:

a) Durch Anwendung des Vorwärtsarbeitens können die Schüler die erste Zahlenmauer[3] ohne Schwierigkeiten von oben nach unten ausfüllen.

Bei der zweiten Zahlenmauer sollten sie die Strategie des Rückwärtsarbeitens verwenden. Es stellt sich dann die Frage, welche Zahl zu 678 addiert werden muss, um 1612 zu erhalten. Ab der dritten Reihe können die Schüler die Zahlen aus denen sie die Ergebnisse der vierten Reihe erhalten frei wählen.

---

[3] Aus Elemente Unterrichtsmaterialien. 2000. S46.

96	113	250	157
209	363	407	
572	770		
1342			

934	678		
1612			

b) Die Schüler sollten sich in diesem Aufgabenteil klarmachen, dass sie in der ersten Additionsmauer das Vorwärts- und in der zweiten das Rückwärtsarbeiten angewendet haben. Sie üben auch hier, über ihre Lösungswege zu reflektieren und thematisieren die beiden Strategien nochmals speziell.

c) Bei dieser Aufgabe ist nun das Verständnis der Schüler für die beiden Strategien und dem daraus entstehenden Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten gefragt. Sie können dann auf die Idee kommen, eine Additionsmauer zu entwickeln, in der sowohl am Anfang als auch am Ende Zahlen vorgegeben sind. Zur Lösung muss man dann abwechselnd von beiden Seiten ausgehend rechnen, um in der Mitte passende Zahlen erhalten zu können.

Für eine solche Additionsmauer wird nachfolgend ein Beispiel[4] gegeben:

		29	
		151	
429			
775			

Aufgabe 8: Magische Quadrate

In einem magischen Quadrat sind die Zahlen so angeordnet, dass ihre Summe aus jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonalen gleich ist. Diese Summe nennt man die „magische Zahl".

a) Dieses etwa 2000 Jahre alte magische Quadrat aus Indien ist etwas Besonderes, weil es vollkommene Eigenschaften besitzt. In ihm stimmen die Summen der Spalten und Zeilen nicht mit denen der Diagonalen überein. Es gibt statt der Diagonalen aber andere Teile dieses Quadrats, die die magische Zahl enthalten. Welche Teile geben dem Indischen Quadrat seine vollkommenen Eigenschaften?

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

[4] Aus Elemente Unterrichtsmaterialien. 2000. S46.

b) Das älteste bekannte magische Quadrat kommt aus China und ist etwa 6500 Jahre alt.[5]

Hier musst du die Zahlen 1 bis 9 so anzuordnen, dass die Summen der Zeilen, Spalten und Diagonalen identisch sind.

c) Wie bist Du beim Ausfüllen des magischen Quadrats vorgegangen? Welche Deiner Ideen hat Dich weitergebracht? Kann sie auch bei anderen magischen Figuren helfen?

Lösungsmöglichkeit:

a) Damit die Schüler den Aufbau magischer Quadrate besser verstehen können, sollen sie zunächst die Anordnung der Zahlen eines Quadrates betrachten und die Summe der Zeilen und Spalten berechnen. Bei der Suche nach dem dritten Bereich des Quadrats, der die magische Zahl 34 enthält können sie sich näher mit dem Aufbau beschäftigen. Sie werden herausfinden, dass es die vier Eckquadrate sind, die dem Indischen Quadrat seine vollkommenen Eigenschaften verleihen.

b) Hier sollen die Schüler versuchen, selbst ein magisches Quadrat auszufüllen. Sie werden nach einigen fehlgeschlagenen Versuchen beginnen, Überlegungen zu einer sinnvollen Anordnung der Zahlen anzustellen.

Zum Beispiel können sie versuchen große mit kleinen Zahlen zu kombinieren:

➔ 9 & 1, 8 & 2, 7 & 3, 6 & 4 unter Ausnutzung dieser Symmetrie erhalten sie Zahlenpaare mit gleichen Summen. Es wird sich dann die Frage anschließen, was nun mit der 5 zu tun ist.

Intuitiv können die Schüler auf die Idee kommen, diese in die Mitte zu stellen und ihre Zahlenpaare darum anzuordnen.

Daraus ergibt sich dann folgende Lösung:

---

[5] Quadrat aus Elemente Unterrichtsmaterialien 2000. S.44.

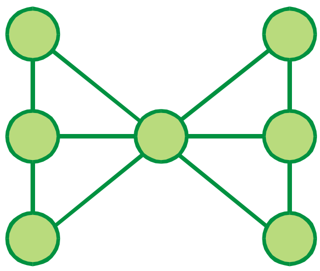
8	3	4
1	5	9
6	7	2

c) In diesem Aufgabenteil reflektieren die Schüler ihre Vorgehensweise aus b) und halten ihre zielführenden Einfälle nochmals fest. In einem Klassengespräch können solche Lösungsideen und ihre zukünftige Anwendbarkeit besprochen werden.

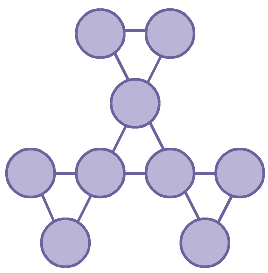
<u>Aufgabe 9:</u> Magische Figuren

Es gibt außer den Quadraten noch ganz andere magische Figuren. Auch hier gilt, dass die Summen der Verbindungsgeraden gleich sein müssen.

a) Verteile die Zahlen 30, 31, 32, 33, 34, 35 und 36 so auf die Kreise dieser magischen Figur, dass die Summe der Zahlen auf jeder Geraden 99 ergibt.



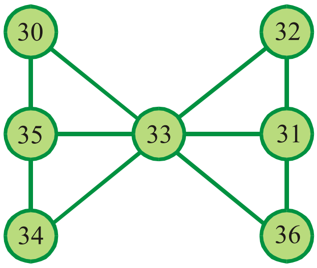
b) Die unten stehende magische Figur hat Albert Einstein entwickelt. Hier müssen die Zahlen 1 bis 9 so verteilt werden, dass die Summe in allen vier Dreiecken gleich ist.



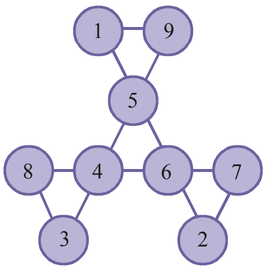
c) Vergleiche die Aufgabe „Magische Quadrate“ mit dieser Aufgabe. Konntest Du Deine bereits entwickelten Lösungsstrategien auch auf diese beiden Figuren übertragen? Hast Du neue Beobachtungen gemacht?

Lösungsmöglichkeit:

a) Nachdem die Schüler bereits in der Aufgabe „Magische Quadrate“ ein magisches Quadrat gelöst haben, kennen sie schon einige Lösungsideen mit deren Hilfe sie auch diese magische Figur lösen können. Sie werden weiter für Zahlensymmetrien sensibilisiert und können die bereits entdeckte Besonderheit der im zentralen Feld stehenden Zahl als invariante Eigenschaft erfahren. Auch hier ist es die mittlere aller Zahlen, die nach der Paarbildung übrig bleibt und letztlich im zentralen Feld steht.



b) Diese magische Figur unterscheidet sich von den bisher kennen gelernten insofern, dass es kein zentrales Feld, sondern stattdessen ein zentrales Dreieck gibt. Zunächst können die Schüler auch hier Zahlenpaare mit gleicher Summe bilden.
Die Erkenntnis, dass bislang die mittlere Zahl auch im mittleren Feld stand, könnte sie zu der Idee führen, die drei Zahlenpaare mit den jeweils größten und kleinsten Zahlen in die äußeren Dreiecke zu schreiben. Die Felder, die das mittlere Dreieck bilden könnten dann mit der zentralen Zahl 5 und mit dem Zahlenpaar gefüllt werden, das aus ihrem Vorgänger und Nachfolger, also 4 und 6, gebildet wird.
Die richtige Anordnung ergibt folgende Lösung.



c) Dieser Vergleich sollte die Schüler weiterhin daran gewöhnen, über ihre Lösungen zu reflektieren, sich Fragen zu stellen und Vorgehensweisen klarzumachen, die sie auch in Zukunft anwenden können und die ihre Problemlösekompetenzen steigern können.