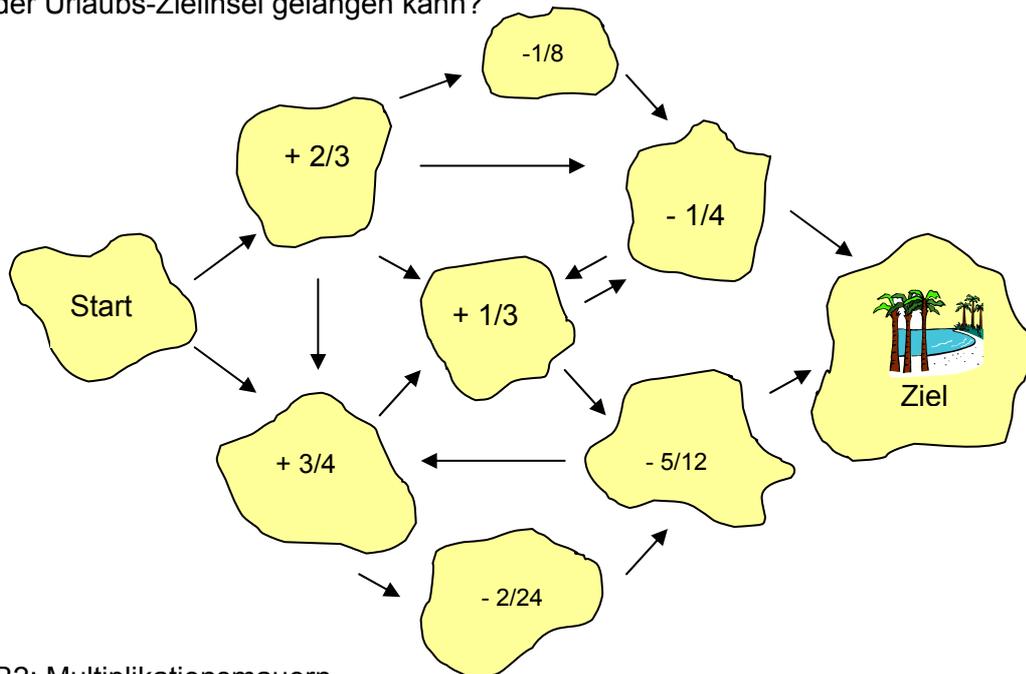


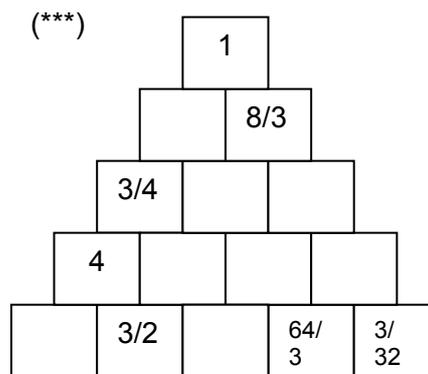
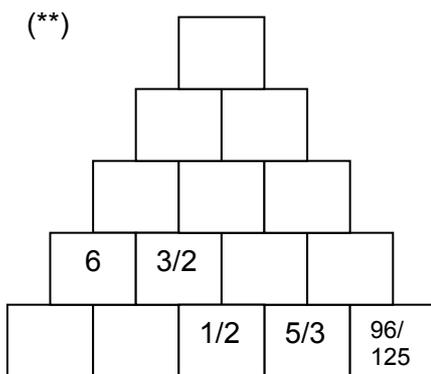
B1: Bruchinseln

Welches ist die kleinste (größte) Summe, mit der man von der kargen Startinsel zu der Urlaubs-Zielinsel gelangen kann?



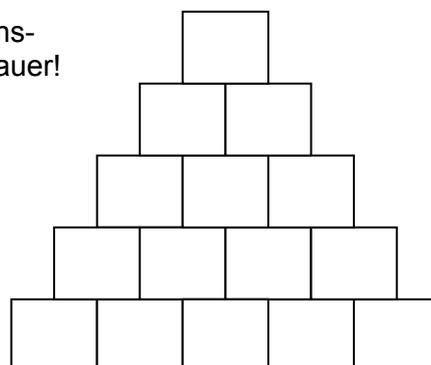
B2: Multiplikationsmauern

Fülle eine der beiden Multiplikationsmauern aus! Das Produkt zweier benachbarter Kästchen kommt in das Kästchen oben drüber!



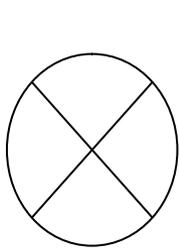
B3:

Erfinde selbst eine Additions- oder eine Multiplikationsmauer!

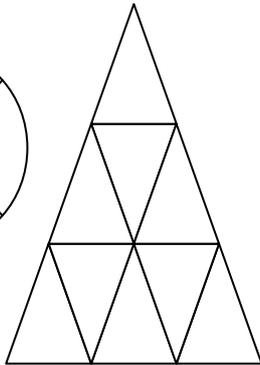


B4: Bruchteile färben

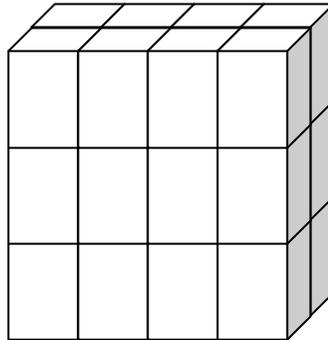
Die gesamte Figur stellt jeweils ein Ganzes dar. Färbe den angegebenen Anteil!



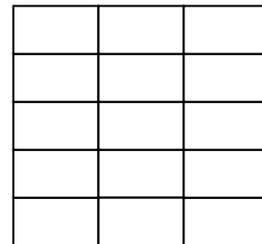
$3/4$



$2/3$



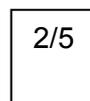
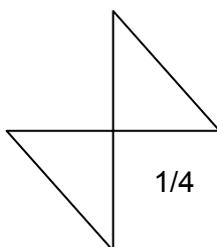
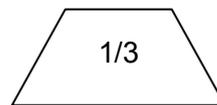
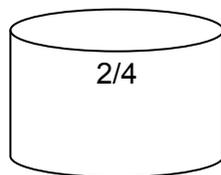
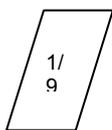
$1/6$



$1/3$ von $4/5$

B5: Bruchteile ergänzen

Die Figur stellt jeweils den angegebenen Bruchteil dar. Wie könnte dann ein Ganzes aussehen?



B6: Suche dir von den folgenden fünf Aufgaben **drei** aus und löse sie! Überlege dir jeweils vorher, welcher Heurismus oder welche Heurismen dir zum Lösen der Aufgabe helfen könnten. Löse eine der Aufgaben auf zwei verschiedene Arten.

(*) Matchboxautos

Pascal spielt mit seinen Matchboxautos: Die Hälfte davon sind rot. Zwei Autos mehr als ein Drittel der restlichen sind blau. Genauso viele sind schwarz; die Übrigen drei sind grün. Wie viele Autos hat er insgesamt?

(***) Streit um acht Käslein

(modifiziert nach RECHBERGER 1990, 33)

Zwei Schäfer saßen eines Abends nach getaner Arbeit am Wegesrand und packten ihr Abendbrot aus. Der eine hatte fünf, der andere drei Harzer Käslein. Als sie gerade mit dem Vesper beginnen wollten, kam ein Mann des Weges, der sich verirrt hatte. Er hatte großen Hunger, und als er die Käslein sah, fragte er die Schäfer, ob er nicht mitessen dürfe; er wolle dafür auch gut bezahlen. Die beiden Schäfer waren einverstanden und teilten die acht Käslein redlich unter den drei Essern auf. Als sie fertig waren, zog der Wanderer acht Taler aus der Tasche, warf sie den freundlichen Schäfern zu und sagte, sie sollten das Geld so gerecht teilen wie die Käslein. Aber kaum war der Gast verschwunden, da gerieten die beiden über der Teilung schon in Streit. Der eine, der fünf Käslein gehabt hatte, sagte: „Lass uns redlich teilen, du vier Taler und ich vier Taler. Ich habe aber zwei Käslein mehr gestiftet als du, und da der Mann für unsere acht Käslein acht Taler gegeben hat, bekomme ich noch zwei Taler von dir. Das macht dann zwei Taler für dich und sechs Taler für mich.“ Damit war der andere Schäfer nicht einverstanden: „Du hast fünf Käslein gehabt und ich drei, also bekomme ich drei Taler und du fünf.“ Es wurde bereits dunkel und sie hatten sich immer noch nicht geeinigt. So beschlossen sie, anderentags einen Richter aufzusuchen, der Recht sprechen sollte. Dieser hörte sich die Geschichte an, nahm Zettel und Bleistift, überlegte eine Weile und verkündete schließlich eine noch andere, aber gerechte Verteilung des Geldes...

Wie könnte der Richter das Geld unter den beiden Schäfern gerecht aufgeteilt haben?

(**) Nadines Kiba

Nadine hat ein großes Glas mit Kirschsafft. Sie möchte aber lieber Kiba (Mixgetränk aus Kirsch- und Bananensaft) trinken. Also trinkt sie die Hälfte des Glases aus und schüttet Bananensaft dazu, bis es wieder voll ist. Nun trinkt sie $\frac{1}{3}$ des Gemisches aus, aber es schmeckt ihr immer noch nicht so gut. Daher füllt sie das Glas wieder mit Bananensaft auf. Nun schmeckt es besser, und sie trinkt $\frac{1}{4}$ des Glases. Dann füllt sie es noch einmal mit Bananensaft auf. Nun schmeckt ihr die Kiba-Mischung sehr gut und sie trinkt das Glas ganz aus. Hat sie nun mehr Kirschsafft, mehr Bananensaft oder von beiden gleich viel getrunken?

(***) Sonja und Moritz

Vor acht Jahren war Sonja $\frac{1}{7}$ mal so alt wie Moritz. Heute ist Moritz dreimal so alt wie Sonja. Wie alt ist Sonja jetzt?

(**) Im Schwimmbad

Susanne und Maria gehen mit ihrer Oma ins Erlebnisschwimmbad. Während ihre Oma nur ein bisschen schwimmt und sonst im Liegestuhl ein Buch liest, unternehmen die beiden Schwestern eine ganze Menge: Insgesamt verbringen sie $\frac{1}{3}$ der Zeit und 4 Minuten im großen Schwimmerbecken mit Wellenbad. Die Hälfte der restlichen Zeit weniger 3 Minuten findet man die beiden bei den Rutschen. Die Hälfte der übrigen Zeit liegen die Schwestern im Whirlpool. In den restlichen 20 Minuten ruhen sie in Liegestühlen neben ihrer Oma. Wie lange waren sie insgesamt im Schwimmbad?

B7: Erfinder gefragt!

Erfinde eine Aufgabe, bei der man die Heuristiken Rückwärtsarbeiten, Vorwärtsarbeiten, systematisches Probieren oder die informative Figur zur Lösung verwenden kann. Erkläre den Heurismus, den du dir ausgesucht hast, anhand der Aufgabe.

B8: „Was kann man alles mit Bruchzahlen anfangen?“

Erstelle eine Mind-Map zum dem Thema „Was kann man alles mit Bruchzahlen anfangen?“ Denke dabei auch an Alltagsbezüge.

B9: **Freiwillige** Knobelaufgabe:

Das Logikrätsel von Einstein

1. Es gibt fünf Häuser mit je einer anderen Farbe.
2. In jedem Haus wohnt eine Person einer anderen Nationalität.
3. Jeder Hausbewohner bevorzugt ein bestimmtes Getränk, raucht eine bestimmte Zigarettenmarke und hält ein bestimmtes Haustier.
4. Keine der 5 Personen trinkt das gleiche Getränk, raucht die gleichen Zigaretten oder hält das gleiche Tier wie einer seiner Nachbarn.

Frage: Wem gehört der Fisch?

Folgende Details sind bekannt:

1. Der Brite lebt im roten Haus.
2. Der Schwede hält einen Hund.
3. Der Däne trinkt gerne Tee.
4. Das grüne Haus steht links vom weißen Haus.
5. Der Besitzer des grünen Hauses trinkt Kaffee.
6. Die Person, die Pall Mall raucht, hält einen Vogel.
7. Der Mann, der im mittleren Haus wohnt, trinkt Milch.
8. Der Besitzer des gelben Hauses raucht Dunhill.
9. Der Norweger wohnt im ersten Haus.
10. Der Marlboro-Raucher wohnt neben dem, der eine Katze hält.
11. Der Mann, der ein Pferd hält, wohnt neben dem, der Dunhill raucht.
12. Der Winfield- Raucher trinkt gerne Bier.
13. Der Norweger wohnt neben dem blauen Haus.
14. Der Deutsche raucht Rothmanns.
15. Der Marlboro-Raucher hat einen Nachbarn, der Wasser trinkt.

Einstein verfasste dieses Rätsel im letzten Jahrhundert. Er behauptete, 98% der Weltbevölkerung seien nicht in der Lage, es zu lösen.

Lösungsvorschläge:

B1:

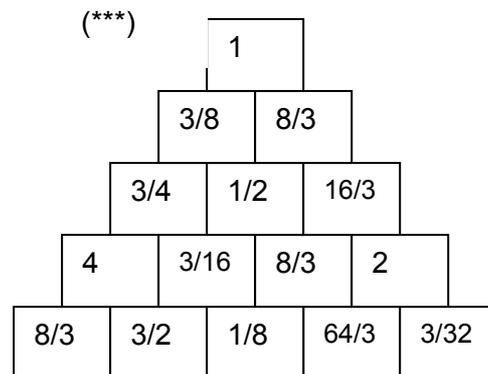
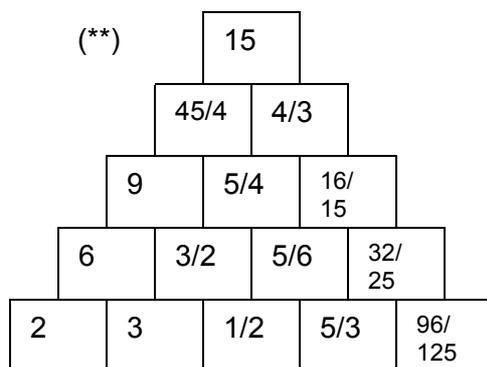
Kleinste Zahl:

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = \frac{16}{24} - \frac{3}{24} - \frac{6}{24} + \frac{8}{24} - \frac{10}{24} = \frac{5}{24}$$

Größte Zahl:

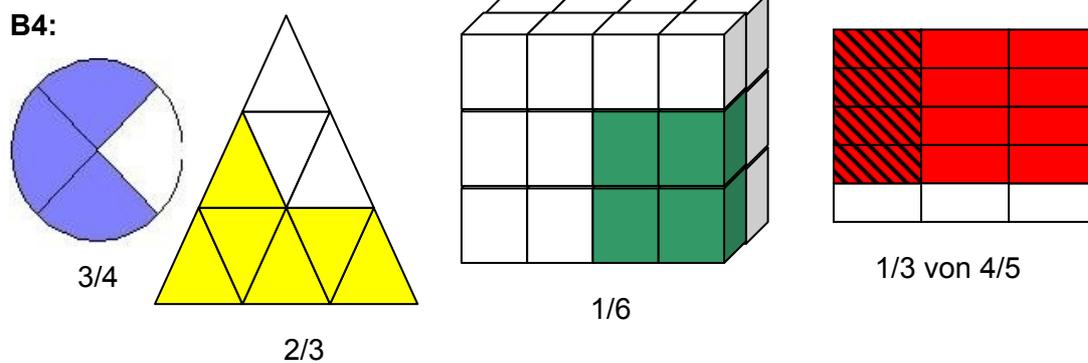
$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

B2: Multiplikationsmauern

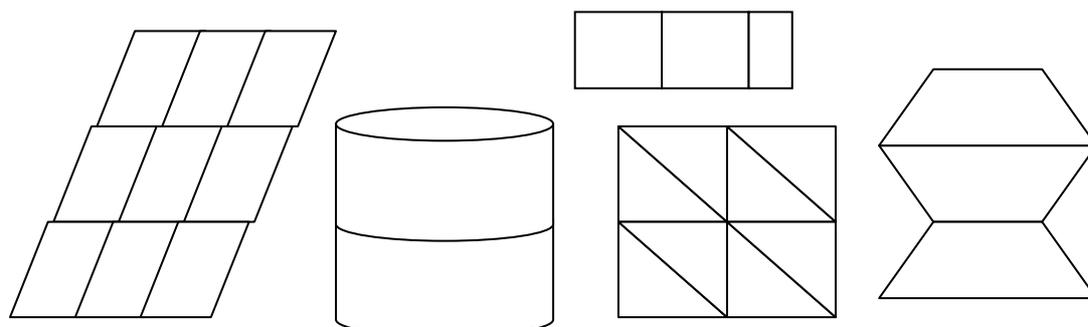


B3: Die selbst erfundenen Mauern könnten z.B. mit dem Banknachbarn ausgetauscht und so kontrolliert werden, oder aber vom Lehrer eingesammelt werden.

B4:

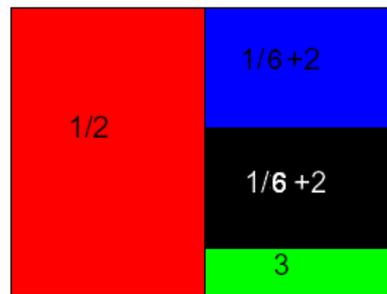


B5: Bei den Anordnungen der Bruchteile sind der Phantasie natürlich keine Grenzen gesetzt, auch wenn hier aus Platzgründen nur eine Version dargestellt ist.



B6:

(*) Matchboxautos



Lösung über eine informative Figur:

Also hat Pascal 42 Matchboxautos.

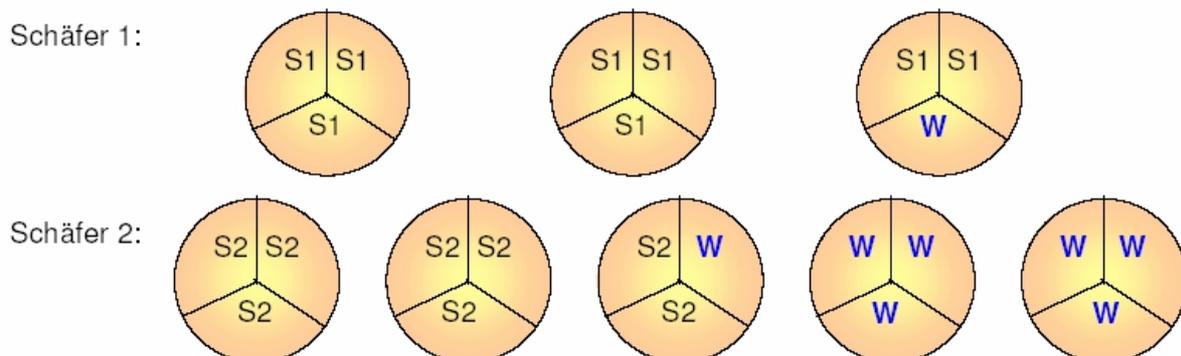
Lösung über systematisches Probieren mit Hilfe einer Tabelle:

	1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch
Geschätzte Gesamtzahl	30	36	42
Grüne Autos	3	3	3
Rote Autos	15	18	21
Blaue Autos	$5 + 2 = 7$	$6 + 2 = 8$	$7 + 2 = 9$
Schwarze Autos	$5 + 2 = 7$	$6 + 2 = 8$	$7 + 2 = 9$
Summe	32	37	42
Bemerkung	Zu wenig Autos geschätzt	Zu wenig Autos geschätzt	Richtig!

(***) Streit um acht Käselein

Eine gerechte Aufteilung kann man sehr gut über eine informative Figur herausfinden. Dabei teilt man jeden Käse in drei Teile, da er unter drei Leuten aufgeteilt werden muss:

S1 = Schäfer 1; S2 = Schäfer 2; **W** = Wanderer



Mit Hilfe dieser informativen Figur kann man erkennen, wie viel Käsestücke der Wanderer von jedem Schäfer gegessen hat: Von Schäfer 1 nur ein Käsestück, von Schäfer 2 sieben Käsestücke. Also müsste der Richter bei einer gerechten Verteilung dem ersten Schäfer einen Taler und dem zweiten Schäfer sieben Taler zusprechen.

Man kann dies auch rechnerisch herausfinden:

Aufteilen der Käselein unter 3 Personen: $\frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$.

Das heißt, der erste Schäfer isst $2\frac{2}{3}$ seiner Käselein, gibt also nur $\frac{1}{3}$ ab. Der zweite Schäfer gibt $2\frac{1}{3}$ seiner Käselein ab. Nun muss man die acht Taler des Wanderers noch auf die Käsestücke, die er gegessen hat, verteilen:

$$2\frac{2}{3} : 8 = \frac{8}{3} : 8 = \frac{1}{3}.$$

Das heißt, der Wanderer bezahlt für $\frac{1}{3}$ Käse einen Taler. Folglich bekommt der erste Schäfer einen Taler und der zweite sieben Taler.

(**) Nadines Kiba

Lösung mit Hilfe des Vorwärtsarbeitens: Nadine trinkt ein Glas Kirschsafft. Von dem Bananensaft trinkt sie: $\frac{1}{2}$ Glas, $\frac{1}{3}$ Glas und $\frac{1}{4}$ Glas, also

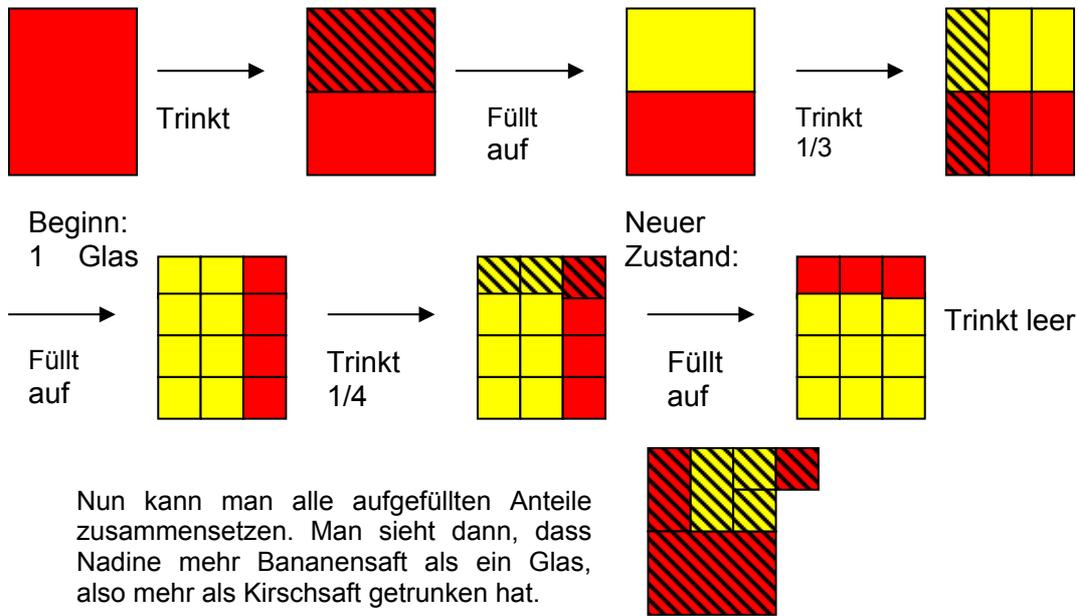
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{12} + \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{13}{12}$$

Da $\frac{13}{12} > 1$ gilt, trinkt sie mehr Bananen- als Kirschsafft.

Weiterer Lösungsvorschlag:

Zu Beginn hat Nadine ein Glas mit Kirschsafft. Da sie keinen Kirschsafft nachfüllt, aber das Glas ganz leert, trinkt sie insgesamt ein Glas Kirschsafft. Über eine informative Figur kann man sehr gut verdeutlichen, wie viel Bananensaft sie trinkt:

K = Kirschsafft; B = Bananensaft

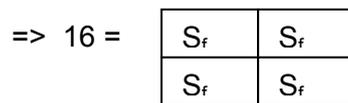
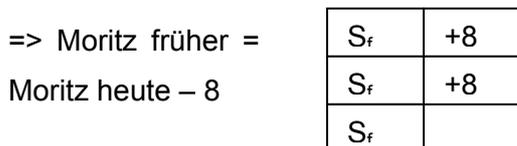
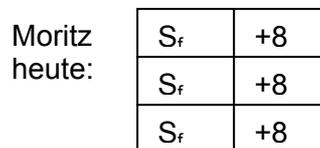
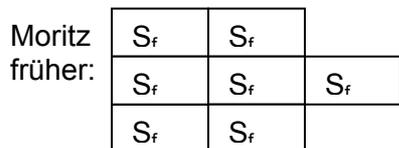


(**) Sonja und Moritz

Systematisches Probieren:

	1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch	4. Versuch
$S_{\text{früher}}$ (geschätzt)	1	2	5	4
$M_{\text{früher}} = S_{\text{früher}} * 7$	7	14	35	28
$S_{\text{jetzt}} = S_{\text{früher}} + 8$	9	10	13	12
$M_{\text{früher}} + 8$	15	22	43	36
$S_{\text{jetzt}} * 3$	27	30	39	36
Bemerkung	Zu niedrig geschätzt	Zu niedrig geschätzt	Zu hoch geschätzt	Richtig!

Informative Figur:



=> $S_f = 4$

Also war Sonja früher 4 Jahre alt und ist jetzt 12.

(**) Im Schwimmbad

Um diese Aufgabe zu lösen, eignen sich z.B. informative Figuren, Rückwärtsarbeiten oder systematisches Probieren mit Hilfe einer Tabelle. Bei dem folgenden Lösungsweg wurde eine Mischung aus Rückwärtsarbeiten und informativen Figuren gewählt:

1/3 der Gesamtzeit + 4 Minuten im Wellenbad	1/2 der Zeit – 3 Minuten bei den Rutschen		1/2 der Zeit im Whirlpool	20 Minuten im Liegestuhl
			1/2 der Zeit im Whirlpool	20 Minuten im Liegestuhl

20 Minuten liegen die Susanne und Maria im Liegestuhl, das ist die Hälfte „der übrigen Zeit“. Die andere Hälfte liegen sie im Whirlpool, das sind also auch 20 Minuten.

Die 40 Minuten im Whirlpool und auf dem Liegestuhl sind die Hälfte der „restlichen Zeit“, die auch noch das Rutschen beinhaltet, plus 3 Minuten. Also ist die Hälfte der Zeit $40 - 3 = 37$ Minuten, d.h. bei den Rutschen, im Whirlpool und auf dem Liegestuhl verbringen die

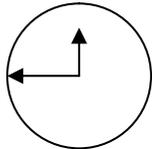
Mädchen 74 Minuten. Sie rutschen also $\frac{74}{2} - 3 = 37 - 3 = 34$ Minuten.

1/2 der Zeit – 3 Minuten bei den Rutschen	1/3 der Gesamtzeit + 4 Minuten im Wellenbad	74 Minuten bei den Rutschen, im Whirlpool und im Liegestuhl
40 Minuten im Whirlpool und im Liegestuhl		

Da die beiden $\frac{1}{3}$ der Gesamtzeit plus 4 Minuten im Wellenbad verbringen, müssen die 74 Minuten $\frac{2}{3} - 4$ Minuten entsprechen. Also sind $\frac{2}{3}$ der Zeit 78 Minuten, $\frac{1}{3}$ entsprechen dann 39 Minuten, und insgesamt sind sie 117 Minuten im Schwimmbad.

B8:

Man nehme
½ kg



Viertel vor 12

Achtel Note



- Mengenangabe
- Zeitangabe
- Längenangabe
- Gewichtsangabe
- In der Musik Viertel
- Pause

Im Alltag

$$\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}$$

Zähler und Nenner werden mit der gleichen Zahl multipliziert

Erweitern

$$\frac{15}{12} = \frac{15 : 3}{12 : 3} = \frac{5}{4}$$

Zähler und Nenner werden mit der gleichen Zahl dividiert

Kürzen

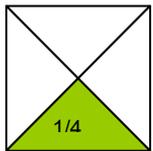
Vergleichen

Zähler werden verglichen

gleichnamige Brüchen

Erst gleichnamig machen

Ungleichnamige Brüchen



$$\frac{7}{5}$$

Bruchteile eines Ganzen

Unechte Brüche

Informative Figuren

Darstellen

4/9		

Was kann man mit Bruchzahlen anfangen?

Rechnen mit Bruchzahlen

Addieren und Subtrahieren

Gleichnamige Brüche

Zähler addieren oder subtrahieren

Nenner beibehalten

$$\frac{1}{6} + \frac{4}{6} = \frac{1+4}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} - \frac{3}{12} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$

Ungleichnamige Brüche

Erst gleichnamig machen

Multiplizieren

Mit einer natürlichen Zahl

Zähler mit der natürlichen Zahl multiplizieren

Nenner beibehalten

$$\frac{3}{5} \cdot 7 = \frac{3 \cdot 7}{5} = \frac{21}{5}$$

Von zwei Brüchen

Zähler mit Zähler multiplizieren

Nenner mit Nenner multiplizieren

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 2} = \frac{12}{10}$$

Dividieren

Durch eine natürliche Zahl

Zähler beibehalten

Nenner mit der natürlichen Zahl multiplizieren

$$\frac{2}{11} : 3 = \frac{2}{11 \cdot 3} = \frac{2}{33}$$

Von zwei Brüchen

Kehrwert des zweiten Bruches bilden

Den ersten Bruch mit dem Kehrwert multiplizieren

$$\frac{3}{8} : \frac{4}{5} = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{8 \cdot 4} = \frac{15}{32}$$

B9: Links

Rechts

Norweger	Däne	Brite	Deutscher	Schwede
Gelb	Blau	Rot	Grün	Weiß
Wasser	Tee	Milch	Kaffee	Bier
Dunhill	Marlboro	Pall Mall	Rothmanns	Winfried
Katze	Pferd	Vogel	Fisch	Hund

Der Fisch gehört also dem Deutschen.