<u>Aufgabe 1:</u> Plätzchenaufgabe

Annette und Michael backen Weihnachtsplätzchen. $\frac{1}{3}$ der Plätzchen überziehen die beiden mit Schokoladenguss, 5 Plätzchen weniger mit buntem Zuckerguss. 28 Plätzchen bleiben ohne Guss. Wie viele Plätzchen haben sie insgesamt gebacken?

Lösungsmöglichkeit*:*

Diese Aufgabe lässt sich über verschiedene Wege lösen. Im Folgenden wird ein sehr anschaulicher Lösungsweg mit Hilfe einer informativen Figur vorgestellt:

28 Plätzchen ohne Guss

Schokoladenguss ($\frac{1}{3}$ der Plätzchen)	Bunter Zuckerguss ($\frac{1}{3}$ der Plätzchen -5)	5	($\frac{1}{3}$ der Plätzchen)

Das große Rechteck stellt die Anzahl der Plätzchen insgesamt dar. Man teilt das Rechteck dann in drei gleichgroße Teile, da *ein Drittel* der Plätzchen mit Schokoladenguss versehen wird (hellbraune Fläche). $\frac{1}{3}$ der Plätzchen minus 5 wird mit Zuckerguss überzogen (blaue Fläche). 28 Plätzchen bleiben ohne Guss. Das sind $\frac{1}{3}$ der Plätzchen plus die 5, die aus dem Drittel mit dem Zuckerguss „übrig“ bleiben. Nun kann man anhand der informativen Figur ablesen, dass ein Drittel der Plätzchen aus 28 – 5 = 23 Plätzchen besteht. Dann haben Annette und Michael also insgesamt 3 * 23 = 69 Plätzchen gebacken.

Lösung mit Hilfe einer Tabelle:

Man überlegt sich, wie viele Plätzchen die beiden insgesamt gebacken haben könnten (zum Beispiel 60). Dann weiß man, dass ein Drittel davon mit Schokolade überzogen werden (das wären also 20). Man weiß auch, dass genauso viele minus 5 Plätzchen mit Zuckerguss versehen werden (das wären dann 15). 28 Plätzchen bleiben ohne Guss. Wenn man das Ganze addiert, ist man schon bei 63 Plätzchen, obwohl man nur von 60 Plätzchen ausgegangen war. Also waren das zu wenig geschätzte Gesamtplätze und man muss beim zweiten Versuch von mehr Plätzen ausgehen:

	1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch	4. Versuch
Gedachte Gesamtzahl	60	75	72	69
Schokoladenguss	20	25	24	23
Zuckerguss	15	20	19	18
Ohne Guss	28	28	28	28
Gesamt ?	63	73	71	69
Bemerkung	Zu wenig geschätzte Plätzchen	Zu viele geschätzte Plätzchen	Fast, aber noch zu viele Plätzchen	Richtig!

In höheren Klassen ist auch das Lösen durch Aufstellen einer Gleichung denkbar:

$$x = \frac{1}{3}x + \left(\frac{1}{3}x - 5\right) + 28 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}x = 23 \quad \Leftrightarrow \quad x = 69$$

An derartigen Aufgaben bietet es sich an, sowohl die informative Figur als auch die Tabelle und gegebenenfalls die Gleichung als heuristische Hilfsmittel und legitime, gleichwertige Lösungswege vorzustellen.

Aufgabe 2: Jahrmarktsaufgabe

Die Kinder aus dem Turn- und Sportverein gehen gemeinsam auf den Jahrmarkt. Am Kettenkarussell kaufen sich die Hälfte der Kinder und 2 weitere Kinder jeweils eine Fahrkarte. Die anderen gehen weiter bis zur Geisterbahn. Dort beschließt die Hälfte der Kinder und ein weiteres Kind sich ein wenig gruseln, während der Rest der Kinder weiter geht. Mit dem Autoscooter wollen nochmals die Hälfte und ein weiteres Kind fahren. Die übrigen fünf Kinder gehen zur Losbude, um Lose zu kaufen. Wie viele Kinder gingen anfangs zusammen auf den Jahrmarkt?

Lösungsmöglichkeit:

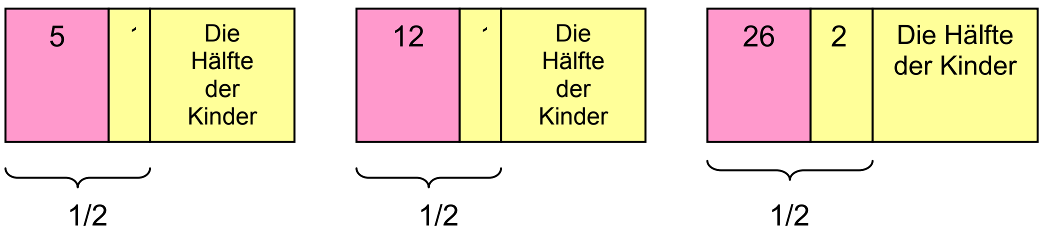
Auch diese Aufgabe ließe sich über eine informative Figur lösen, allerdings wird diese etwas unübersichtlich. Daher bietet sich die Strategie des Rückwärtsarbeitens an:

Man überlegt jeweils rückwärts, wie viele Kinder es vor der jeweiligen Attraktion noch waren. Bei der vierten Attraktion, der Losbude, waren noch 5 Kinder übrig. Beim Autoscooter blieben die Hälfte der Kinder und noch eines mehr übrig. Nun kann man ausprobieren: Angenommen, es waren vorher 10 Kinder, dann wären 5 + 1 = 6 Kinder beim Autoscooter geblieben. 5 + 6 ergibt aber 11, d.h. man hat zu wenig geschätzt. 11 lässt sich nicht ohne Rest durch 2 teilen, also probiert man das ganze mit 12. Die Hälfte von 12 + 1 ergibt 7, und 7 + 5 = 12. Also waren es vor dem Autoscooter noch 12 Kinder. Die gleichen Überlegungen stellt man für die anderen Attraktionen an; eine Tabelle kann dabei helfen.

Attraktion	Nachher	Vorher	Bei der Attraktion geblieben	Probe
Nr. 4: Losbude		5		
Nr. 3: Autoscooter	5	12	Die Hälfte und ein Kind: $\frac{12}{2} + 1 = 7$	5 + 7 = 12

Nr. 2: Geisterbahn	12	26	Die Hälfte und ein Kind: $\frac{26}{2}+1=14$	14 + 12 = 26
Nr. 1: Kettenkarussell	26	30	Die Hälfte der Kinder und noch 2 Kinder: $\frac{56}{2}+2=30$	30 + 26 = 56

Man könnte zur Erleichterung die einzelnen Zwischenschritte durch informative Figuren darstellen:



<u>Aufgabe 3:</u> Rechenvorteile

Bevor du die folgende Aufgabe rechnest, überlege dir erst, wo du Rechenvorteile ausnutzen könntest. Löse dann die Aufgabe!

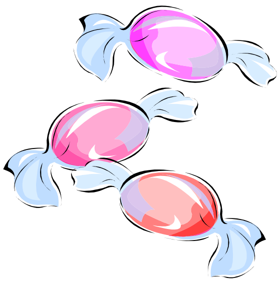
$$\frac{1}{2}+\frac{7}{8}+\frac{5}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{5}+\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{4}=?$$

Lösungsmöglichkeit*:*

Man kann bei dieser Aufgabe Rechenvorteile ausnutzen, indem man erst die Brüche mit dem gleichen Nenner addiert, statt alle Brüche sofort gleichnamig zu machen. Man zerlegt die Aufgabe sozusagen in mehrere kleinere Aufgabe (hier farbig gekennzeichnet):

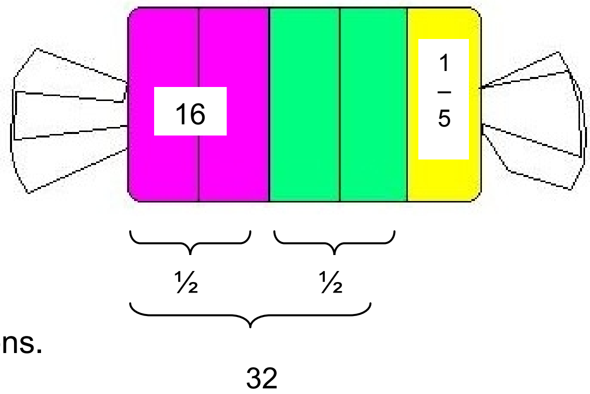
$$\frac{1}{2}+\frac{7}{8}+\frac{5}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{5}+\frac{3}{2}+\frac{4}{5}+\frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}+\frac{10}{8}+\frac{5}{5}+\frac{1}{4}=$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}+\frac{5}{4}+1+\frac{1}{4}=$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}+\frac{6}{4}+1=$$
$$\Leftrightarrow \frac{9}{2}+\frac{3}{2}+1=$$
$$\Leftrightarrow \frac{12}{2}+1=$$
$$\Leftrightarrow 6+1=7$$

<u>Aufgabe 4:</u> Bonbonaufgabe



Kathrin sammelt auf dem Faschingsumzug viele Bonbons. $\frac{1}{5}$ davon isst sie gleich auf. Vom Rest gibt sie die Hälfte ihren beiden Geschwistern. Danach hat sie noch 16 Bonbons übrig. Wie viele Bonbons hatte sie insgesamt gesammelt?

Lösungsmöglichkeit:



Sie hatte zu Beginn 40 Bonbons.

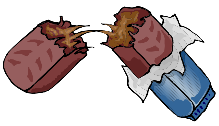
Man kann die Aufgabe auch durch systematisches Probieren mit Hilfe einer Tabelle lösen:

	1. Versuch	2. Versuch	3. Versuch
Gedachte Gesamtzahl	35	45	40
$\frac{1}{5}$	7	9	8
Geschwister	16	16	16
Übrig	16	16	16
Summe	39	41	40
Bemerkung	Zu wenig geschätzt	Zu viel geschätzt	Richtig!

In höheren Klassen wäre die Lösung auch über eine Gleichung möglich:

$$x = \frac{1}{5}x + 16 + 16 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{5}x + 32 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4}{5}x = 32 \quad \Leftrightarrow \quad x = 40$$

<u>Aufgabe 5:</u> Schokoladenriegel



Daniel bekommt zum Geburtstag Schokoladenriegel geschenkt. Am ersten Tag isst er $\frac{1}{4}$ der Riegel und noch 6 Stück auf. Danach hat er zwar Bauchschmerzen, doch am nächsten Tag schafft er trotzdem noch $\frac{1}{3}$ der noch übrigen Riegel und noch 4 weitere. Am dritten Tag isst er die Hälfte der restlichen Riegel und noch einen. Für den vierten Tag bleiben nur noch 7 Schokoladenriegel übrig. Wie viele Schokoladenriegel hatte er am Anfang?

Lösungsmöglichkeit*:*

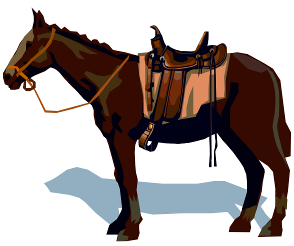
Gesucht ist die Anzahl der Schokoladenriegel, die Daniel anfangs besaß. Man weiß, dass er am Ende des dritten Tages bzw. zu Beginn des vierten Tages noch 7 Schokoriegel hatte. Nun kann man sich überlegen, wie viele es zu Beginn des dritten Tages waren. Denn er hatte am dritten Tag die Hälfte der Riegel und noch einen weiteren gegessen. Man stellt fest, dass 7 + 1 Schokoriegel die Hälfte der Schokoriegel sind. Also waren es zu Beginn des dritten Tages 16 Riegel. Gleiches gilt für den zweiten Tag: Am Ende waren 16 Riegel übrig. Da $\frac{1}{3}$ plus 4 Stück gegessen wurden, müssen die 16 Riegel $\frac{2}{3}$ – 4 der Menge zu Beginn des Tages darstellen. Also waren es 30. Analoges kann man sich für den 1. Tag überlegen, was die Tabelle nochmals verdeutlicht:

Tag Nr.	Anzahl der übrigen Schokoriegel am Ende des Tages	Anzahl der Schokoriegel zu Beginn des Tages
4		7
3	7 = die Hälfte der Schokoriegel vom Beginn des Tages minus 1	(7 + 1) * 2 = 16
2	16 = $\frac{2}{3}$ der Schokoriegel vom Beginn des Tages minus 4	(16 + 4) * $\frac{3}{2}$ = 30
1 (Geburtstag)	30 = $\frac{3}{4}$ der Schokoriegel vom Beginn des Tages minus 6	(30 + 6) * $\frac{4}{3}$ = 48

Daniel hatte anfangs 48 Schokoladenriegel.

<u>Aufgabe 6:</u> Das Erbe

(POHLMANN u.a. 2000, 55)



Ein Vater hinterließ seinen drei Söhnen 19 Pferde. Der älteste Sohn sollte die Hälfte der Pferde, der mittlere ein Viertel und der jüngste ein Fünftel der Pferde erhalten. Die Söhne grübelten lange, wie sie die Verteilung vornehmen sollten. Bis ein alter Nachbar sagte: „Ich leihe euch ein Pferd." Nun konnten die Söhne ihr Erbe aufteilen. Können die Söhne dem Nachbarn das geliehene Pferd zurückgeben, ohne dass einer auf einen Teil seines Erbes verzichten muss?

Lösungsmöglichkeit*:*

Man kann die Aufgabe mit Hilfe einer informativen Figur lösen, die aus 20 Kästchen besteht. Dabei stellt ein Kästchen ein Pferd dar:

Ältester Sohn	Ältester Sohn	Ältester Sohn	Ältester Sohn	Ältester Sohn
Ältester Sohn	Ältester Sohn	Ältester Sohn	Ältester Sohn	Ältester Sohn
Mittlerer Sohn	Mittlerer Sohn	Mittlerer Sohn	Mittlerer Sohn	Mittlerer Sohn
Jüngster Sohn	Jüngster Sohn	Jüngster Sohn	Jüngster Sohn	Nachbar

Nun sieht man, dass die Söhne dem Nachbarn sein Pferd zurückgeben können.

Man kann dies auch über eine Rechnung zeigen:

$$20 - \frac{1}{2} * 20 - \frac{1}{4} * 20 - \frac{1}{5} * 20 = 1$$

Ob die Aufteilung für die Söhne gerecht ist, kann im Unterricht diskutiert werden.

<u>Aufgabe 7:</u> Handytarife

Oma Else hat ein Handy geschenkt bekommen und möchte sich nun einen Tarif auswählen, aber sie kennt sich überhaupt nicht damit aus.

a) Kannst du ihr ein paar Tipps dazu geben? Informiere dich dazu im Internet oder in Prospekten, die du bei Handyanbietern bekommst.

b) Oma Else möchte nicht mehr als 5 Minuten pro Woche und hauptsächlich ins Festnetz telefonieren. Folgende Angebote hat sie herausgesucht:

Sonnenschein-Tarif
- kein monatlicher Grundpreis
- Karte, gültig für $\frac{1}{2}$ Jahr: 15 € oder 30 €
- Minutenpreis ins Festnetz: 0,80 €
- Minutenpreis zu einem

Freizeit-Tarif
- Mindestvertragslaufzeit: 24 Monate; einmaliger Anschlusspreis: 10 €
- monatlicher Grundpreis: 10,95 €
- Minutenpreis zu einem anderen Handy: 0,40 €
- Minutenpreis ins Festnetz: 0,09 €

Privat-Tarif
- Mindestvertragslaufzeit: 24 Monate; einmaliger Anschlusspreis: 25 €
- Monatlicher Grundpreis: 9,95 €
- Monatliches Gesprächsguthaben: 20 Minuten für 2,5 € oder 40 Minuten für 5 € ins Festnetz oder zu anderen Handys
- Weitere Minuten: 0,40 €

Welches Angebot würdest du ihr empfehlen?

Alternative Aufgabe: Suche ihr einen Tarif aus denen heraus, die du im Internet gefunden hast oder von denen du Prospekte bekommen hast.

Lösungsmöglichkeit:

a) Hier einige Tipps, die man geben könnte:
- Gibt es einen monatlichen Grundpreis?
- Gibt es einen Vertrag, und wenn ja wie lange läuft er mindestens und was kostet er?

- Wie hoch ist der Minutentarif ins Festnetz, wie hoch auf Handys?
- Gibt es monatliche Gesprächsguthaben?
- Wie viel möchte Oma Else etwa pro Monat telefonieren und wohin?
- ...

b) In diesem Aufgabenteil kann die Verwendung des INvariantsprinzips sehr nützlich sein. Um die Angebote vergleichen zu können, muss man eine Invariante herstellen, in diesem Fall die monatliche Telefonzeit. Anschließend kann die Aufgabe modelliert werden:
Zur Vereinfachung könnte man annehmen, dass Oma Else monatlich 20 Minuten nur ins Festnetz telefoniert. Nun hat man einen Bezugswert und kann vergleichen:

	Sonnenschein-Tarif	Freizeit-Tarif	Privat-Tarif
Monatlicher Grundpreis	-	10,95 €	9,95 €
Preis für 20 Minuten ins Festnetz	16 €	1,8 €	2,5 €
Summe pro Monat	16 €	12,75 €	12,45 €
Bemerkungen	Die 30 € Karte würde sich eher lohnen, dann muss nicht so oft eine neue gekauft werden.	Mindestvertragslaufzeit 24 Monate. Einmaliger Anschlusspreis 10 €	Mindestvertragslaufzeit 24 Monate. Einmaliger Anschlusspreis 25 €

Der Sonnenscheintarif ist unter den gegebenen Bedingungen monatlich zu teuer, hat aber keine Anschlussgebühr und Vertragsbindung. Zur weiteren Vorgehensweise konstruiert man am besten eine weitere Invariante, nämlich wie lange das Handy behalten werden soll.

Hier wird als Invariante 24 Monate gewählt, da dies die Mindestvertragslaufzeit ist, und dann wird nochmals verglichen:

	Sonnenschein-Tarif	Freizeit-Tarif	Privat-Tarif
Monatlicher Grundpreis	-	10,95 €	9,95 €
Preis für 20 Minuten ins Festnetz	16 €	1,8 €	2,5 €
Summe pro Monat	16 €	12,75 €	12,45 €
Summe in 24 Monaten	384 €	306 €	298,9 €
Zusätzliche Kosten in 24 Monaten	-	10 €	25 €
Summe	384 €	316 €	323,8 €

Man sieht nun, welcher der drei Tarife unter den gewählten Bedingungen am billigsten ist. Alle drei sind aber sehr teuer, daher würde man Oma Else eher empfehlen, weniger zu telefonieren (oder einen ganz anderen Tarif zu suchen). Nun könnte man z.B. überlegen, welcher Tarif am billigsten ist, wenn man höchstens 10 oder 5 Minuten pro Monat telefoniert.
Interessant ist es natürlich, wenn die Schüler selbst Angebote mitbringen und selbst Bedingungen wählen, um anschließend den besten Tarif heraussuchen.
Man könnte die Schüler auch in Gruppen einteilen und jeweils ein bestimmtes Profil erstellen lassen, für das dann der günstigste Tarif gewählt werden soll.