**<u>Aufgabe 1:</u> Hausnummernaufgabe**

Nana sagt: „Meine Hausnummer liegt zwischen 94 und 129. Sie ist durch 2, 3 und 5 teilbar.“ Kannst du die Hausnummer erraten?

**Lösungsmöglichkeit:**

Diese Aufgabe lässt sich gut mit Hilfe einer Tabelle lösen. Dabei überlegt man, welche Zahlen zwischen 94 und 129 durch 5, 3 bzw. 2 teilbar sind. Am besten beginnt man bei der 5, da man dann für die 3 bzw. 2 weniger Zahlen überprüfen muss. Um die Teilbarkeit überprüfen zu können, helfen die Endstellen- und Quersummenregeln.

| | |
|---|---|
| Zahlen zwischen 94 und 129, die durch 5 teilbar sind | 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125 |
| Zahlen zwischen 94 und 129, die durch 5 und durch 3 teilbar sind | 105, 120 |
| Zahlen zwischen 94 und 129, die durch 5, 3 und 2 teilbar sind | 120 |

Nana hat also die Hausnummer 120.

Eine weitere Lösungsmöglichkeit liegt in der Verwendung eines Zahlenstrahls.

**<u>Aufgabe 2:</u> Telefonnummeraufgabe**

Martin sagt Lea seine Telefonnummer: „Meine Telefonnummer liegt zwischen 962265 und 962375. Sie ist durch 5 und 9 teilbar.“ Als Lea ihn nachmittags anrufen möchte, meldet sich ein Fremder. Sie überlegt kurz, und da kommt ihr die Erleuchtung...

Wieso hat sie Martin nicht erreicht? Was kann sie nun tun?
Kannst du deine eigene Telefonnummer auch auf diese Art verschlüsseln?

**Lösungsmöglichkeit:**

Martins Angabe war nicht eindeutig, daher hat Lea eine falsche Nummer gewählt. Die folgende Tabelle als heuristisches Hilfsmittel zeigt mögliche Telefonnummern nach Martins Angaben:

| | |
|---|---|
| Zahlen zwischen 962265 und 962375, die durch 9 teilbar sind | 962271, 962280, 962289, 962298, 962307, 962316, 962325, 962334, 962343, 962352, 962361, 962370 |
| Zahlen, die zusätzlich durch 5 teilbar sind | 962280, 962325, 962370 |

Nur eine der drei Nummern 962280, 962325 und 962370 ist Martins Telefonnummer. Lea hatte eine falsche erwischt. Da sie nur noch zwei mögliche Nummern zur Auswahl hat, könnte sie einfach beide ausprobieren, bis sie Martin erreicht.

**<u>Aufgabe 3:</u> Rätsel aufstellen**

Versuche selbst ein Rätsel mit deiner Telefonnummer oder deiner Hausnummer aufzustellen. Lasse anschließend einen Klassenkameraden/ ein Klassenkameradin deine Nummer erraten.

**Lösungsmöglichkeit:**

Hier sollen die Schüler selbst eine Aufgabe entwickeln. Diese Aufgabe dient dem Kennen lernen der heuristischen Strategie „systematisches Probieren" mit Hilfe einer Tabelle, aber auch dem Üben des Teilens.

**<u>Aufgabe 4:</u> Schullandheim**

Die Klasse 6a und 6b fahren zusammen eine Woche in ein Schullandheim. Lisa und Martin haben jeweils den Gesamtbetrag für den Ausflug ihrer Klasse berechnet. In Lisas Klasse sind insgesamt 21 Schüler, in Martins Klasse sind zwei Schüler mehr. Wenn jeder Schüler gleich viel bezahlen muss, so hat Lisa 2142 € berechnet und Martin 2324 €. Was meinst du dazu?

**Lösungsmöglichkeit:**

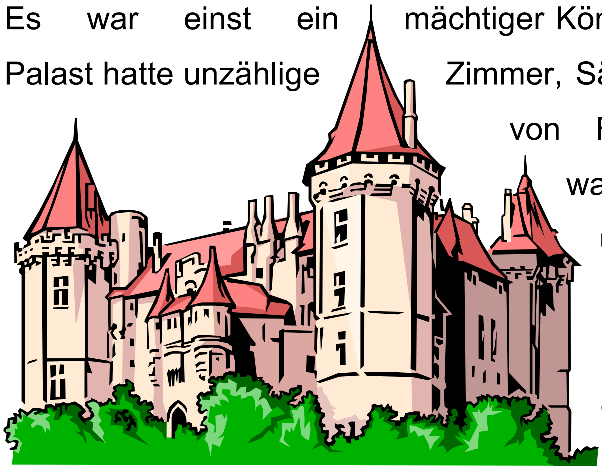
Lisa hat mit einem Gesamtbetrag von 102 € pro Schüler gerechnet, denn 2142 € : 21 Schüler = 102 € pro Schüler. Martin muss sich verrechnet haben, denn 2324 € : 23 Schüler $\neq$ 102 €.

Martin hätte $102\text{€} \cdot 23\text{Schüler} = 2346\text{€}$ berechnen müssen.

Mit Hilfe des Zerlegungsprinzips erkennt man, dass 2142 € durch 21 teilbar ist, denn $2100\text{€} + 21\text{€} + 21\text{€} = 2142\text{€}$ .

Aber 2324 € ist nicht ohne Rest durch 23 teilbar, denn $2300\text{€} + 23\text{€} + 1\text{€} = 2324\text{€}$.

**Aufgabe 5: Kerkeraufgabe**



Es war einst ein mächtiger König, der in einem riesigen Palast lebte. Der Palast hatte unzählige Zimmer, Säle und Kammern, die durch ein Labyrinth von Fluren und Geheimgängen verbunden waren, sowie zahlreiche Türme und ganz tief unten 100 düstere Kerker. In diesen schmachteten 100 Gefangene, jeweils von einem persönlichen Wächter bewacht. Als ein großes Fest gefeiert wurde, versprach der König, einem Teil seiner Gefangenen die Freiheit zu schenken. So ordnete er seinen Kerkerwächtern folgendes an: „Der erste von euch möge an jeder Tür den Schüssel betätigen, so dass alle geöffnet sind. Nun möge der zweite Wächter an jeder zweiten Tür den Schlüssel betätigen, so dass jede zweite wieder geschlossen wird. Der dritte Wächter möge nun an jeder dritten Tür den Schlüssel drehen und die jeweiligen Türen auf- bzw. zuschließen. So möget ihr bis zum 100. Wächter fortfahren. Den Gefangenen, deren Türen dann offen sind, schenkt jeweils 10 Goldstücke und ihre Freiheit."
Welche Gefangenen kamen frei?

**Lösungsmöglichkeit:**
Man kann diese Aufgabe mit Hilfe einer Tabelle übersichtlich darstellen, was die Lösung erleichtert. Man muss sich erst folgendes überlegen: Ein Gefangener kommt dann frei, wenn das Schloss an seiner Tür m mal betätigt wird, wobei m eine ungerade Zahl ist.

| Schloss Nr. | Wird betätigt von Wächtern Nr. | Anzahl der Betätigungen | Bemerkungen |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | Wird frei gelassen |
| 2 | 1, 2 | 2 | |
| 3 | 1, 3 | 2 | |
| 4 | 1, 2, 4 | 3 | Wird frei gelassen |
| 5 | 1, 5 | 2 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 6 | 1, 2, 3, 6 | 4 | |
| 7 | 1, 7 | 2 | |
| 8 | 1, 2, 4, 8 | 4 | |
| 9 | 1, 3, 9 | 3 | Wird frei gelassen |
| 10 | 1, 2, 5, 10 | 4 | |
| 11 | 1, 11 | 2 | |
| 12 | 1, 2, 3, 4, 6, 12 | 6 | |
| 13 | 1, 13 | 2 | |
| 14 | 1, 2, 7, 14 | 4 | |
| 15 | 1, 3, 5, 15 | 4 | |
| 16 | 1, 2, 4, 8, 16 | 5 | Wird frei gelassen |
| ... | | | |

Natürlich kann man die Tabelle fortsetzen und so die Lösung herausfinden, was durchaus legitim ist (wenn auch sehr zeitaufwendig). Man kann sich aber auch überlegen, oder anhand der Tabelle sehen, dass die Gefangenen frei kommen, deren Zellennummer eine Quadratzahl ist. Dies ist leicht einzusehen, wenn man die Teiler der Zahlen betrachtet (bzw. die Wächter, die das jeweilige Schloss betätigen). Denn die Teiler einer Zahl, die keine Quadratzahl sind, lassen sich als Zahlenpaare aufschreiben, die miteinander multipliziert die Zahl ergeben (z.B. 12 = 1 * 12 = 2 * 6 = 3 * 4), weshalb die Anzahl hier gerade ist. Bei Quadratzahlen multipliziert man allerdings eine Zahl mit sich selbst, daher ist die Anzahl der Teiler hier stets ungerade (z.B. 9 = 1 * 9 = 3 * 3).

Hat man dies eingesehen, so kann man sich die Lösung überlegen: Es kommen die Gefangenen der Zellen mit Nr. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 und 100 frei.

**<u>Aufgabe 6:</u> Nimm-Spiel**

Es sind 20 Bonbons gegeben. Zwei Spieler dürfen im Wechsel je 1 bis 3 Bonbons nehmen. Wer das letzte Bonbon nimmt, hat gewonnen.

a) Karin hat gerade das 15. Bonbon genommen, es sind also noch 5 Bonbons übrig. Silvia ist als nächstes dran. Schreibe mehrere Möglichkeiten auf, wie das Spiel nun weitergehen könnte. Wer gewinnt jeweils?
b) Nachdem Karin und Silvia das Spiel mehrmals gespielt haben, wollen sie wissen, ob man das Spiel mit einer Strategie gewinnen kann. Kannst du ihnen helfen?
c) Erfinde selbst ein Nimm-Spiel mit anderen Mengen oder Spielregeln und überlege dir eine Lösungsstrategie!

**Lösungsmöglichkeit***:*

a) Einige mögliche Ausgänge des Spiels:

| Silvia nimmt Bonbon(s) Nr. … | Karin nimmt Bonbon(s) Nr. … | Silvia nimmt Bonbon(s) Nr. … | Gewinnerin |
|---|---|---|---|
| 16 | 17 | 18 + 19 + 20 | Silvia |
| 16 | 17 + 18 + 19 | 20 | Silvia |
| 16 + 17 | 18 + 19 + 20 | | Karin |
| 16 + 17 + 18 | 19 + 20 | | Karin |

b) Benutzt man die Strategie des Rückwärtsarbeitens, so findet man heraus, dass man bei bestimmten Nummern gewinnen kann:

- Wer Bonbon Nr. 16 nimmt (bzw. 15 + 16 oder 14 + 15 + 16), der gewinnt. Denn der andere muss dann mindestens ein Bonbon nehmen (Nr. 17), höchstens aber drei (17 + 18 + 19). Dadurch kann der erste Spieler das letzte Bonbon nehmen (18 + 19 + 20 oder 19 + 20 oder 20).

- Dasselbe gilt für denjenigen, der Nr. 12 nimmt, denn nachdem der Mitspieler ein bis drei Bonbons genommen hat, kann man auf 16 ergänzen.
- Dasselbe gilt für Bonbon Nr. 8 und Bonbon Nr. 4
- Die Person, die als zweite dran ist, kann immer gewinnen. Sie muss dazu die vom Beginner genommenen Bonbons immer auf 4 oder auf Vielfache von 4 aufrunden.

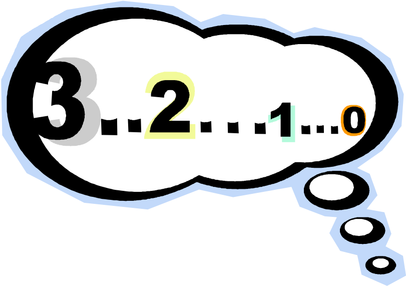
c) Das gleiche Spiel würde mit 20 Bonbons auch funktionieren, wenn man jeweils 1 bis 4 Bonbons ziehen dürfte. Der zweite Spieler müsste dann immer auf fünf ergänzen (ebenfalls Teiler von 20).

Man könnte auch mehr Bonbons zur Verfügung stellen, einen Teiler der Anzahl wählen und dann jeweils 1 bis (Teiler – 1) Bonbons nehmen lassen. Die Strategie bliebe dieselbe.

Man könnte auch bei den „ursprünglichen" Regeln denjenigen, der das letzte Bonbon nimmt, verlieren lassen. Nun hätte der erste Spieler die Möglichkeit zu gewinnen, indem er zuerst 3 Bonbons zieht und danach die des zweiten Spielers jeweils auf 4 ergänzt.

Zur Verdeutlichung hier eine Tabelle: W, X, Y, Z $\in$ 1, 2, 3

| Erster Spieler nimmt... | Zweiter Spieler nimmt... | Summe |
|---|---|---|
| 3 | W | 3 + W |
| 4 – W | X | 7 + X |
| 4 – X | Y | 11 + Y |
| 4 – Y | Z | 15 + Z |
| 4 – Z (hier ist Nr. 19 dabei) | Nr. 20 | |




**<u>Aufgabe 7:</u> Der Stammbruch**

(Aus dem Aufgabenpraktikum, TUD WS 02/03)

Die Summe dreier Stammbrüche beträgt $\frac{47}{60}$.

Bestimme drei mögliche Stammbrüche.

(Hinweis: Ein Stammbruch ist ein positiver Bruch mit dem Zähler 1).

**Lösungsmöglichkeit***:*

Sind die Nenner teilerfremd, dann gilt $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{47}{60}$ .

Nun müssen wir nur noch die Zahl 60 in ein Produkt von 3 Faktoren zerlegen und systematisch probieren, um zu einem Ergebnis zu kommen.

Dazu betrachten wir die Teiler von 60, nämlich

$T_{60} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$.

Die 1 fällt weg, da $\frac{1}{1} > \frac{47}{60}$. Daher kann man bei der 2 beginnen und systematisch drei mögliche Faktoren wählen und so nach einer Lösung suchen:

| **a * b * c** | **bc + ac + ab** | |
|---|---|---|
| 2 * 2 * 15 | 64 | Keine Lösung |
| 2 * 3 * 10 | 56 | Keine Lösung |
| 2 * 5 * 6 | 52 | Keine Lösung |
| 3 * 4 * 5 | 47 | Lösung |