LANGFRISTIGE HAUSAUFGABE (STOCHASTIK)

<u>Aufgabe 1:</u> 6 und 7, gleichgeblieben?

Anna sagt: „Die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der Augensumme 6 oder 7 beim Werfen zweier Würfel sind gleichgroß, da sie sich beide auf 3 Arten darstellen lassen:

6 = 1 + 5 = 4 + 2 = 3 + 3

7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4“.

Stimmt das?

<u>Aufgabe 2:</u> Erfinde eine Aufgabe

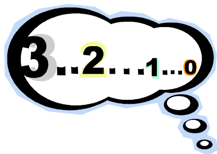
Erfinde eine Aufgabe zur Wahrscheinlichkeit p = 4/9! Welche heuristische Strategie kann dir dabei ungemein helfen?

<u>Aufgabe 3:</u> Paprika schneiden

Wie kann man mit einem großen Messer und möglichst wenigen Schnitten eine Paprika in 50 beliebig große Teile teilen?

<u>Aufgabe 4:</u> Ungerade Zahlen

Welche 4 positiven ungeraden Zahlen ergeben zusammenaddiert 14? Wie viele Lösungen gibt es? Löse die Aufgabe auf zwei verschiedenen Lösungswegen, und benenne das heuristische Hilfsmittel und die Strategie, die du benutzt!



<u>Aufgabe 5:</u> Du musst helfen!

Ein Freund aus deiner Parallelklasse kennt das **Fallunterscheidungsprinzip** noch nicht. Kannst Du es ihm erklären und beibringen? Benutze, wenn du willst, eine Aufgabe, bei deren Lösung dir dieses Prinzip geholfen hat!

WAHLAUFGABEN

Wähle mindestens zwei der folgenden Aufgaben aus, und bearbeite sie!

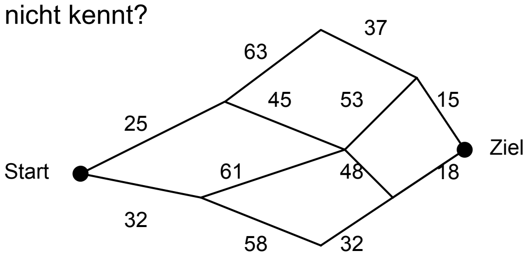
<u>Aufgabe 6</u>: Der kürzeste Weg (**)

Die Abbildung zeigt skizzenhaft eine Rennstrecke, die auf unterschiedlichen Wegen vom Start zum Ziel führt. Die Streckenabschnitte haben unterschiedliche Längen.

a) Wie viele verschiedene Wege gibt es?

b) Welches ist der kürzeste Weg vom Start ins Ziel?

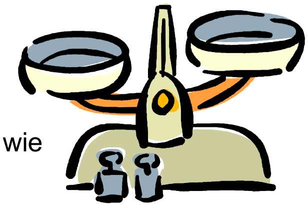
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau diesen (kürzesten) Weg zu wählen, wenn man die Strecke nicht kennt?



<u>Aufgabe 7:</u> Mehr als 5 Primfaktoren (**)

Welche Zahlen, die kleiner sind als 100 haben mehr als 5 Primfaktoren?

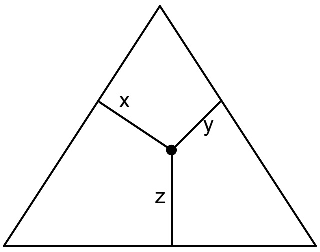
<u>Aufgabe 8:</u> Gewichte (*)**



Frau Keller aus dem Tante-Emma-Laden um die Ecke möchte wissen, wie sie mit 4 Gewichten und ihrer Balkenwaage alle Gewichte zwischen 1/4 Pfund und 10 Pfund auf 1/4 Pfund genau wiegen kann. Kannst du ihr sagen, wie viel die 4 Gewichte jeweils wiegen müssen?

<u>Aufgabe 9:</u> Wann ist es ein Dreieck? (*)**

Ein Punkt möge willkürlich in ein gleichseitiges Dreieck fallen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann man aus den drei entstehenden Loten (auf die Seiten) x, y und z ein Dreieck zusammenlegen?



Viel Erfolg beim Lösen dieser Hausaufgabe!

Notiere zum Schluss noch, wie viel Zeit du in etwa für die Bearbeitung gebraucht hast:

ca. ☐ ***Stunden***

LÖSUNGSVORSCHLÄGE:

<u>Aufgabe 1:</u> 6 und 7, gleichgeblieben?

Das stimmt nicht! Denn von den 36 Möglichen Ergebnissen beim Werfen zweier Würfel entfallen 5 Ergebnisse auf das Ereignis „Augensumme **6**“ und 6 Ergebnisse auf das Ereignis „Augensumme **7**“. Dies wird durch folgende Tabelle ersichtlich:

1 1	1 2	1 3	1 4	**1 5**	**1 6**
2 1	2 2	2 3	**2 4**	**2 5**	2 6
3 1	3 2	**3 3**	**3 4**	3 5	3 6
4 1	**4 2**	**4 3**	4 4	4 5	4 6
5 1	**5 2**	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

p(Augensumme **6**) = 1/36 · 5 = **5/36**

p(Augensumme **7**) = 1/36 · 6 = **6/36** = 1/6

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augensumme **7** ist größer.

<u>Aufgabe 2:</u> Erfinde eine Aufgabe

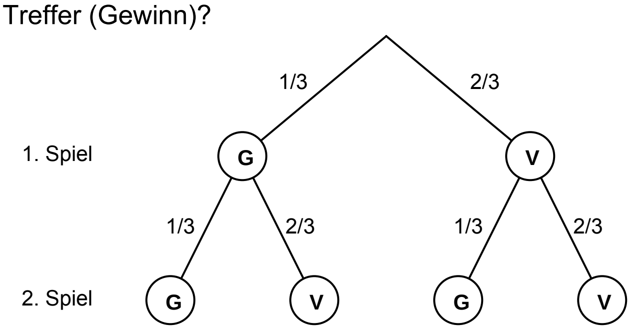
Folgende Aufgaben könnten die Schüler formulieren:

1)

Betty hat in ihrer Schublade 9 Paar Schuhe (Frauen haben immer etwas mehr davon), 4 bunte und 5 schwarze. Da sie zu viel Zeit beim Einkaufen benötigt hatte, musste ihre Mutter die Tasche für die Klassenfahrt packen, und das ohne darauf zu achten, welche Kleidungsstücke zusammenpassen könnten. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Mutter ein buntes Paar Schuhe eingepackt?

2)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man bei den ersten beiden Spielen der Elferwette genau einen Treffer (Gewinn)?



G = gewinnen

V = verlieren

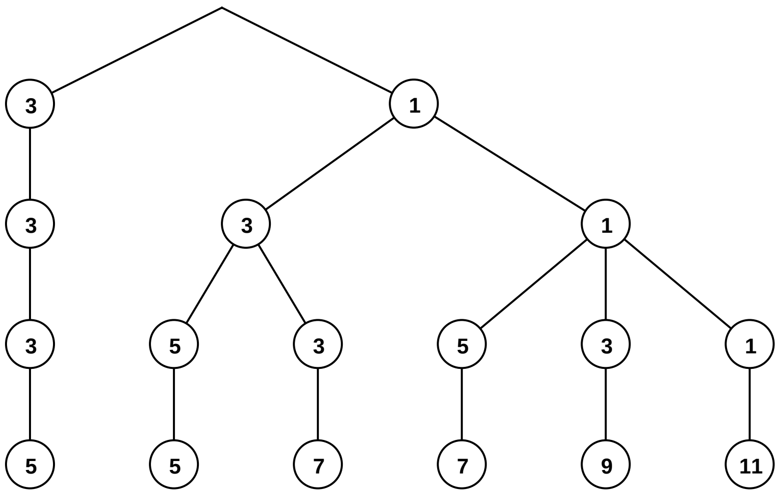
Allgemein benutzt man beim Erfinden einer Aufgabe das Rückwärtsarbeiten – man überlegt hier, welche Umstände man schaffen muss, damit sich eine Wahrscheinlichkeit p = 4/9 ergibt.

Aufgabe 3: Paprika schneiden

Beim ersten Mal schneiden erhält man 2 Stücke, diese kann man mit einem Schnitt in $2 \cdot 2 = 4$ Stücke teilen. Somit hat man nach dem fünften Mal schneiden $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ Stücke. Jetzt kann man 18 dieser Stücke nehmen und sie in 36 Stücke teilen, man erhält also mit **6 mal schneiden** 50 Stücke.

Aufgabe 4: Ungerade Zahlen

1. Lösungsmöglichkeit: *Baumdiagramm (**IF**):*

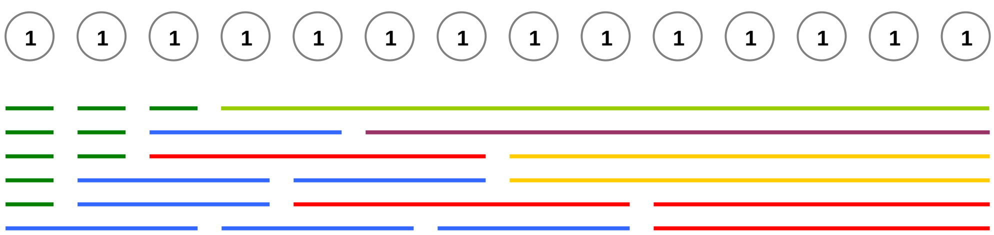


Es gibt
6 Möglichkeiten

2. Lösungsmöglichkeit: *Tabelle (**T**):*

1. Summand	2. Summand	3. Summand	4. Summand	Summe
1	1	1	11	14
1	1	3	9	14
1	1	5	7	14
1	3	3	7	14
1	3	5	5	14
3	3	3	5	14

3. Lösungsmöglichkeit: *Informative Figur (**IF**):*



Heuristische Strategien/Prinzipien:

- Vorwärtsarbeiten **VA**
- systematisches Probieren **SPo**
- Zerlegungsprinzip **ZP**
- (evtl.) Fallunterscheidungsprinzip **FP**

<u>Aufgabe 5:</u> Du musst helfen! Das Fallunterscheidungsprinzip

Zentrale Idee:

Man betrachtet die Aufgabe nicht als ganzes sondern fokussiert zunächst nur einen Teil der Aufgabe, der leichter zu verstehen, zu berechnen oder in mit anderen Größen in Beziehung zu setzten ist, oder gar zu einer anderen Lösung führt als ein anderer Teil.

Fragen:

Welche Fälle muss oder kann ich unterscheiden? Wie viele Lösungen gibt es? Welche Spezialfälle kann ich betrachten (Rückführung)?

Beispiel:

Ein Rechteck mit Kanten einer ganzzahligen Länge habe den Flächeninhalt 120 cm². Welche verschiedenen Umfänge haben die möglichen Rechtecke?

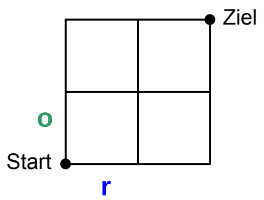
<u>Lösung:</u>

Man muss die verschiedenen Möglichkeiten von Kantenlängen trennen und für jede dieser Möglichkeiten den daraus resultierenden Umfang berechnen:

a	**b**	**A = a · b**	**U = 2 · (a · b)**
1	60	60	122
2	30	60	64
3	20	60	46
4	15	60	38
5	12	60	34
6	10	60	32

<u>Aufgabe 6:</u> Der kürzeste Weg

a) Man kann die Strecke wie folgt darstellen:



Nun muss man entlang der Linien zweimal nach rechts (r) und zweimal nach oben (o) gehen:

r r o o	o r r o
r o r o	o r o r
r o o r	o o r r

6 Möglichkeiten

b)

Dazu gehören folgende Weglängen:

r r o o	r o r o	r o o r	o r r o	o r o r	o o r r
140	159	161	**136**	138	140

Den kürzesten Weg fährt man, wenn man nach links startet und zweimal den rechten Weg wählt.

c)

Es gibt hintereinander 3 Verzweigungen nach jeweils 2 Wegen ($p = 1/2$). Daraus folgt:

p(kürzester Weg) = $1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2$ = **1/8**

<u>Aufgabe 7:</u> Mehr als 5 Primfaktoren

Man nimmt zuerst den kleinstmöglichen Fall (Extremalprinzip):

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$ **64**

Schnell ist klar, dass 7 Primfaktoren nie eine Zahl kleiner 100 liefern:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$

Nun versucht man die Werte der einzelnen Primfaktoren zu erhöhen:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 =$ **96**

Ebenfalls fehl schlägt:

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 160$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 144$

Also sind es nur die Zahlen **64** und **96**, die diese Bedingung erfüllen.

<u>Aufgabe 8:</u> Gewichte

Man muss erkennen, dass man die Gewichte auf beiden Seiten der Balkenwaage einsetzen kann.

Die Gewichte erschließen sich durch systematisches Probieren:

¼ Pfund, ¾ Pfund, **2 ¼** und **6 ¾** Pfund.

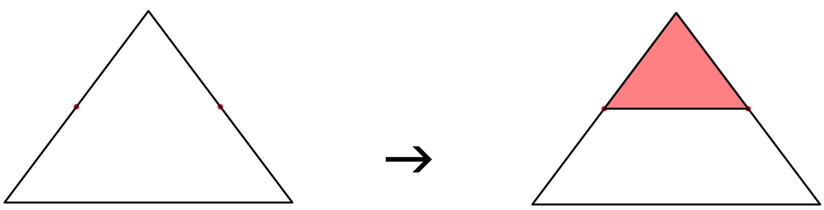
Man kann das Problem auch auf die ganzen Zahlen von 1 – 40 zurückführen; man muss dann die gefundenen Zahlen nur durch 4 teilen.

<u>Aufgabe 9:</u> Wann ist es ein Dreieck?

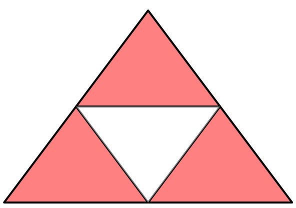
Damit man ein Dreieck aus den Strecken x, y und z bilden kann, muss gelten:

$x + y \geq z$ / $x + z \geq y$ / $y + z \geq x$ (Dreiecksungleichung).

Um sich der Lösung zu nähern, muss man jeweils die Werte auf der linken Seite der Ungleichung = 0 setzen. x und dann y = 0 liefert im Fall : $x + y = z$ folgende 2 Punkte (jeweils auf der Seitenhälfte, die einen Bereich bilden (rot), der die Ungleichung nicht erfüllt:



Geht man so bei jeder Ungleichung vor, erhält man drei Bereiche (rot), die keine der Ungleichungen erfüllen:



Rückführung der Wahrscheinlichkeit auf Flächenanteile:

1/4 der ursprünglichen Fläche erfüllt die Ungleichungen (weiß) → **p = ¼.**