Aufgabe 1: **Die Malaktion**

Der große Schulhof des Gymnasiums darf bemalt werden.

(a) Die Klassen 8a und 8b bemalen zusammen ein quadratisches Feld mit 5x5 Steinen, davon bemalt die Klasse 8a 4x4 Steine. Veranschauliche die Fläche, die die Klasse 8b bemalt hat und stelle dazu eine Gleichung auf.

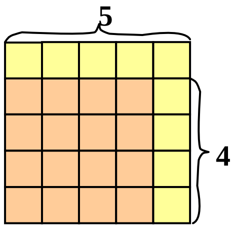
(b) Die 7. Klassen haben auch eine quadratische Fläche bemalt. Da es sehr schön geworden ist, dürfen sie die vier Quadratseiten um 8m verlängern. Dies bedeutet eine Vergrößerung der Fläche um 336m². Welche Maße haben die alte und die neue bemalte Fläche?

(c) Zwei Achtklässler beobachten die Malerarbeiten. Achim, der Schlauberger, sagt: „Wäre eine Quadratseite 123456 cm lang, ist die Fläche 15241383936 cm² groß.“ „Na toll, weißt du auch die Fläche, wenn eine Seite 123455 cm und die andere 123457 cm lang ist?“ Warum kann Achim sofort antworten, ohne die Zahl auswendig gelernt zu haben?

Lösung:

(a) Gleichung: $5^2 - 4^2 = (5 + 4) \cdot (5 - 4) = 9$

Informative Figur:



(b) Bezeichne a die ursprüngliche Seitenlänge der bemalten Fläche.

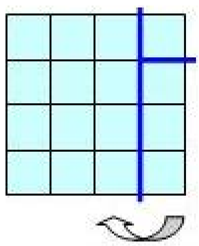
Dann gilt laut Aufgabenstellung:	$(a + 8)^2 = a^2 + 336$
Auflösen der linken Seite liefert:	$a^2 + 16a + 64 = a^2 + 336$
Auflösen nach a liefert:	$16a = 272$ also $a = 17$
Die ursprüngliche Fläche berechnet sich zu:	$(17m)^2 = 289m^2$
Für die neue Fläche gilt:	$289m^2 + 336m^2 = (17m+8m)^2 = 625m^2$.

(c) 123456 wird als Invariante a gesehen. 123455 ist dann $(a - 1)$ und 123457 entspricht $(a + 1)$.

Mit $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$ folgt daraus $123455 \cdot 123457 = (a - 1) \cdot (a + 1) = a^2 - 1 = 15241383935$.

Da Achim den Wert von a^2 bereits kennt, kann er die gesuchte Zahl sofort nennen.

Informative Figur:



Wird eine Quadratseite um eins verkürzt, lassen sich die kleinen Quadrate unten ansetzen, um die andere Seite um eins zu verlängern. Dabei bleibt immer genau ein Quadrat übrig. Also ist die resultierende Fläche um eins verringert:

$(a - 1) \cdot (a + 1) = a^2 - 1$

<u>Aufgabe 2:</u> Niemals negativ

Warum ist der Wert des Terms $x^2 - 4xy + 4y^2$ bei freier Wahl von x und y niemals negativ? Finde mindestens einen weiteren Term dieser Bauart, der diese Bedingung erfüllt.

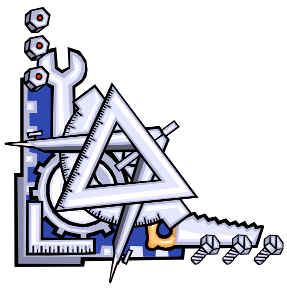
Lösung:

Durch die Umformung $x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)^2$ wird offensichtlich, dass dieser Ausdruck niemals negativ sein kann, denn das Quadrat einer beliebigen (reellen) Zahl ist stets größer gleich Null.

Jede Gleichung, die sich in der Form $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ schreiben lässt, liefert daher einen Term, der die Bedingung der Nichtnegativität erfüllt (z.B. $4u^2 - 20uv + 25v^2$.)

Die Gleichung $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ entspricht der 2. Binomischen Formel, die Bedingung der Nichtnegativität wird jedoch auch von Gleichungen der Art $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ erfüllt, dabei handelt es sich um die 1. Binomische Formel.

<u>Aufgabe 3:</u> Wachsende Quadrate



(a) Ein Quadrat hat die Seitenlänge 20cm. Die Seiten werden nun um 5cm verlängert. Um wie viel Prozent ändern sich der Umfang des Quadrats und sein Flächeninhalt?

(b) Zeige, dass sich der Flächeninhalt eines Quadrats der Seitenlänge a um den Wert $b^2 + 2ab$ vergrößert, wenn man die Seiten des Quadrats um b verlängert.

Lösung:

(a) Das Ausgangsquadrat hat einen Umfang von $4 \cdot 20cm = 80cm$. Der Umfang des vergrößerten Quadrats beträgt $4 \cdot (20cm + 5cm) = 100cm$. Die prozentuale Änderung erhält man z.B. über den folgenden Dreisatz:

80cm	-	100%
20cm	-	25%
100cm	-	125%

Dies entspricht einer Vergrößerung des Umfangs um 25%.

Das Ausgangsquadrat hat eine Fläche von $(20\ cm)^2 = 400\ cm^2$. Die Fläche des vergrößerten Quadrats beträgt $(20cm + 5cm)^2 = 625\ cm^2$. Die prozentuale Änderung erhält man z.B. über den folgenden Dreisatz:

$400cm^2$	-	100%
$25cm^2$	-	6,25%
$625cm^2$	-	156,25%

Dies entspricht einer Vergrößerung um 56,25%. Umfang und Flächeninhalt vergrößern sich durch die Seitenverlängerung also nicht um denselben Anteil!

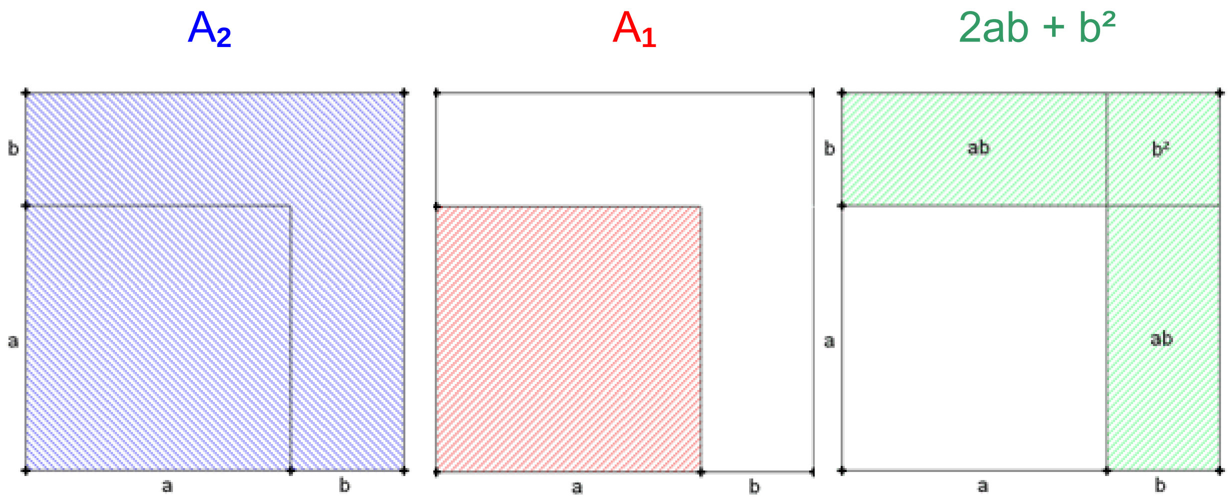
(b) Die Fläche des Ausgangsquadrats hat den Wert $A_1 = a \cdot a = a^2$.

Verlängert man jede Seite um b beträgt der Flächeninhalt $A_2 = (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$.

Mit der 1. Binomischen Formel folgt $A_2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Bildet man nun die Differenz aus dem neuem Flächeninhalt A_2 und dem alten Flächeninhalt A_1 folgt die Behauptung unmittelbar: $A_2 - A_1 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 = \mathbf{2ab + b^2}$.

Informative Figur:



<u>Aufgabe 4:</u> Kehrzahlsuppe

Tim behauptet Ungeheuerliches: „Addierst Du eine positive rationale Zahl (ungleich Null) zu deren Kehrzahl, so hat das Ergebnis mindestens den Wert 2.“ Überprüfe Tims Behauptung mit ein paar eigenen Zahlen. Kannst Du die Richtigkeit der Behauptung beweisen?

Gehe von der Ungleichung $(q - 1)^2 \geq 0$ aus, deren Gültigkeit aus den Ausführungen zu Aufgabe 2 folgt.

Lösung:

Zu zeigen ist $q + 1/q \geq 2$ für jede beliebige positive rationale Zahl q ungleich Null.

Ausgehend von der allgemeingültigen Ungleichung: $(q - 1)^2 \geq 0$

erhält man durch Ausmultiplizieren der linken Seite: $q^2 - 2q + 1 \geq 0$.

Addiert man auf beiden Seiten 2q, folgt daraus: $q^2 + 1 \geq 2q$

Die Division durch q offenbart die Richtigkeit der Behauptung: $q + 1/q \geq 2$