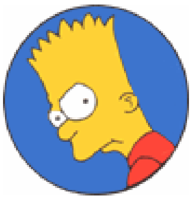
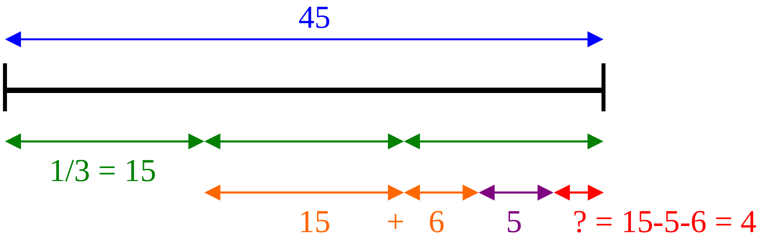
<u>Aufgabe 1:</u> Krusty der Clown



In der Show von Krusty dem Clown wollen alle Besucher aus Springfield in die erste Reihe. Auch Bart fragt einen Kameramann, ob noch Plätze frei sind. Dieser antwortet: „ Ein Drittel ist bereits von Schülern besetzt, 6 Plätze mehr sind durch die Altersheimbewohner belegt und 5 Plätze müssen für Lehrer freigehalten werden. Insgesamt sind es 45 Plätze.“ Kann Bart die Show aus der ersten Reihe betrachten?

Lösung:

(1) mit informativer Figur:



In der ersten Reihe sind noch vier Plätze frei!

(2) mit Gleichungen:

$45 = 45 \cdot 1/3 + (45 \cdot 1/3 + 6) + 5 + x$

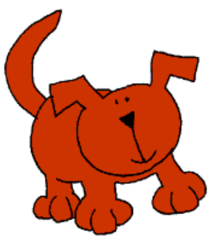
$45 – 15 – 21 – 5 = x$ daraus folgt $x = 4$

In der ersten Reihe sind noch vier Plätze frei.

(3) mit Tabelle:

Sitzplätze Gesamt	45
Ohne Schüler	30
Ohne Altersheim	9
Ohne Lehrer (freie Plätze)	4

<u>Aufgabe 2:</u> Die Hundeschau



Marlon besucht eine kleine Hundeschau und beim Betrachten der Wettbewerbe sagt er:“ Ich zähle 22 Köpfe und 60 Beine.“ Wie viele Menschen und Hunde waren an der Veranstaltung beteiligt?

Lösung:

(1) mittels Extremalprinzip:

Jedes Lebewesen hat mindestens zwei Beine. 22 Köpfe ergeben 44 Beine. 60 Beine – 44 Beine = 16 Beine. Das sind die Restbeine der Hunde (von denen es also 8 Stück gibt). Und das macht 22 – 8 = 14 Menschen.

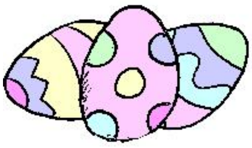
(2) mit Gleichungen:

Sei y die Anzahl der Hunde und x die der Menschen.

Dann gilt	$x + y = 22$	(I)	(laut Aufgabenstellung)
und	$4y + 2x = 60$	(II)	(da jeder Hund vier und jeder Mensch zwei Beine hat)
aus (I) folgt	$x = 22 – y$		
eingesetzt in (II)	$4y + 2 \cdot (22-y) = 60$		
liefert dies	$4y + 44 – 2y = 60$		
bzw.	$2y = 16$		→ die Anzahl der Hunde beträgt y = 8

Die Anzahl der Menschen ergibt sich zu 22 – 8 = 14.

<u>Aufgabe 3:</u> Ostern



Maren hat ihre fünf Freunde Timo, Sandra, Kai, Julia und Lars an Ostern zu sich nach Hause eingeladen.

(a) Maren möchte ihren Freunden die gleiche Anzahl von Geschenken machen und ihrem Bruder Stefan zwei Sachen schenken. Insgesamt hat sie nun 17 Päckchen. Wie viele Geschenke bekommen ihre Freunde jeweils?

(b) Jeder der fünf Gäste bringt 4 Eier zum Verstecken mit. Nach zwei Stunden wurden 25 Eier gefunden, drei Eier liegen noch in ihrem Versteck. Welcher Anteil der Eier stammt von Maren?

(c) Nach der Eiersuche stellt Marens Mutter für die Jungs eine Schale mit Schokoeiern auf den Tisch, die aber erst nach dem Händewaschen gegessen werden sollen. Einer der Jungs kann es nicht aushalten und isst heimlich ein Drittel der Eier und verschwindet dann auch im Bad. Kaum ist er dort, kommt der zweite Junge und isst auch ein Drittel der Eier, er weiß ja von seinem Vorgänger nichts. Auch der dritte der Jungs stürmt nach dem Händewaschen sofort zu den Eiern und isst ebenfalls ein Drittel davon. Als alle Jungs da sind, meint Timo: „Das nenn ich aber eine kleine Schale, nicht mal drei Eier für jeden!“ Wie viele Eier waren anfangs in der Schale?

(d) Lars soll für seine Mutter nach der Feier ein paar Einkäufe für den nächsten Morgen machen. Leider hat er den Einkaufszettel mit Schokolade der Eier beschmiert. Wie könnten die Preise des originalen Zettels lauten?

Lösung:

(a) Bezeichne x die Anzahl der Geschenke, die jeder Freund erhält. Dann gilt $x = (17 - 2) / 5 = 3$.
Jeder ihrer Freunde bekommt drei Geschenke.

(b) Sei x die Anzahl der von Maren zugesteuerten Eier. Dann ist $4 * 5 + x = 25 + 3$ also $x = 8$.
Maren hat 8 Eier zugesteuert, das ist ein Anteil von 8/28=2/7 und entspricht ungefähr 28,6 %.

(c) Nicht mal drei Eier für jeden – also lagen weniger als neun und mehr als sechs Eier in der Schale. Da dieser Rest zwei Drittel einer ganzen Zahl ist, kommt sieben nicht in Frage, sondern nur acht. Der Dritte aß also von zwölf Eiern vier, der Zweite von 18 Eiern sechs und der Erste gar neun von den 27 Eiern, die anfangs in der Schale waren

(d) Diese Aufgabe hat keine eindeutige Lösung. Deshalb hilft hier auch systematisches Probieren weiter. Eine Möglichkeit ist diese:

Einkaufszettel:

Marmelade:	1,79€
Toast:	2,50€
Nutella:	3,25€
Butter:	0,99€
4 Äpfel:	0,80€
10 Brötchen:	5,20€
	14,53€

<u>Aufgabe 4:</u> Die Go-Kart-Bahn

Ralf, Sabine und Nick verbringen ihren Nachmittag auf der Go-Kart-Bahn.

(a) Sabine fährt konstant mit 40 km/h. Wie lange braucht sie für fünf 3km lange Runden?

(b) Ralf fährt mit 50 km/h drei der 3 km langen Runden. Nick startet, nachdem Ralf eine Runde absolviert hat, fährt auch drei Runden, aber mit 60 km/h. Wer ist schneller im Ziel?

(c) Um für ein Rennen qualifiziert zu werden, muss Nick in 2 der 3 km langen Trainingsrunden im Schnitt insgesamt 60km/h fahren. Im 1. Durchgang schafft er durchschnittlich nur 30 km/h. Wie schnell muss Nick im 2. Durchgang fahren?

Lösung:

(a) Die Gesamtstrecke berechnet sich zu $5 * 3$ km = 15 km
Die benötigte Zeit erhält man aus dem Dreisatz: 40 km – 60 Min
1 km – 3/2 Min
15 km – 45/2 Min = 22,5 Min

Sabine benötigt für die fünf Runden 22,5 Minuten.

(b) Ralf benötigt für die 6 km (2 Runden) lange Strecke: 6 km $\cdot$ 60 Min / 50 km = 7,2 Min
Nick benötigt für die 9 km (3 Runden) lange Strecke 9 km $\cdot$ 60 Min / 60 km = 9 Min
Somit kommt Nick Zweiter ins Ziel.
(c) Nick hat keine Chance mehr sich zu qualifizieren. Um im Schnitt 60 km/h auf 6km zu fahren, darf Nick nicht länger als 6 Minuten brauchen. Da er aber in der ersten Runde nur 30 km/h fuhr, dauerte das bereits 6 Minuten.

Aufgabe 5: Beweis einer Bruchungleichung

Es ist zu zeigen: Für positive a, b, c gilt: $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c} \geq \frac{3}{a+b+c}$

Lösung:
Symmetrieprinzip: Rechts stehen drei Brüche, links steht ein Bruch mit einer 3 im Zähler. Eine Idee ist, den Bruch rechts als Summe drei identischer Brüche zu schreiben. Die Behauptung lautet dann:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}$$

Aspektbeachtung/Zerlegungsprinzip:
Es gilt:

$$\frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{a+b+c}$$

weil a + b ≤ a + b + c (folgt aus Voraussetzung)

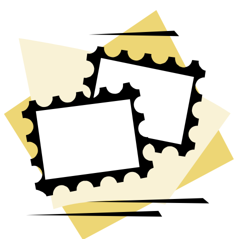
$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+b+c}$$

weil b + c ≤ a + b + c (folgt aus Voraussetzung)

$$\frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b+c}$$

weil a + c ≤ a + b + c (folgt aus Voraussetzung).
Daraus folgt die Behauptung.

<u>Zusatzaufgabe:</u> Briefmarken

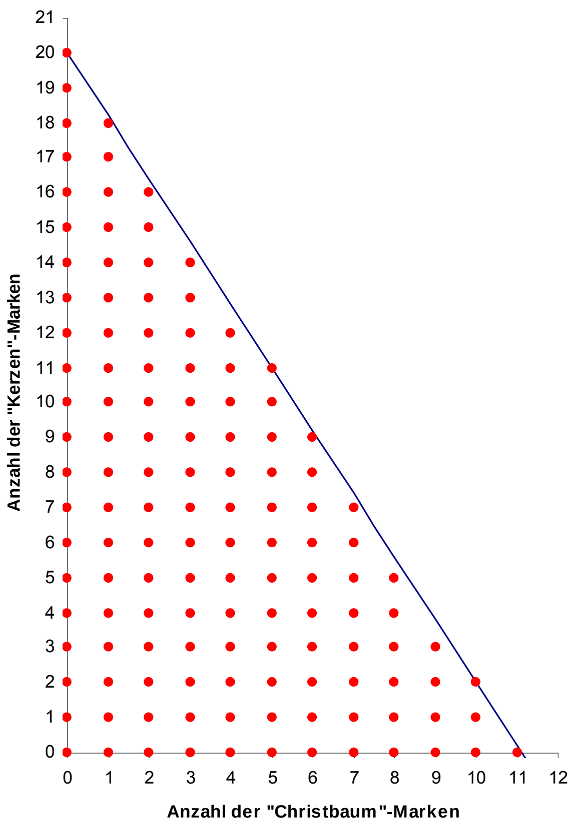


Zu Weihnachten gibt die Post die Sonderbriefmarken „Christbaum“ für 2,25 € und „Kerze“ für 1,25 € heraus. Markus hat 25 € zur Verfügung und möchte das Geld ganz oder teilweise für diese Briefmarken ausgeben. Stelle seine Einkaufsmöglichkeiten graphisch dar. Gib dann alle Einkaufsmöglichkeiten an, bei denen Markus den kompletten Betrag für Briefmarken einsetzt.

Lösung:
Bezeichne x die Anzahl der Marken „Christbaum“, und y die der Marken „Kerze“. Dann lässt sich aus den Angaben im Text folgende Gleichung aufstellen: $2{,}25x + 1{,}25y \leq 25$

Das Auflösen nach y liefert die Gleichung: $y \leq -1{,}8x + 20$

Diese Gleichung gibt die Anzahl der Marken „Kerze“ (y) abhängig von der Anzahl der „Christbaum“-Marken (x) an. Die gültigen Einkaufsmöglichkeiten (die ganzzahligen Punktpaare unterhalb der Geraden) sind in der folgenden Darstellung durch rote Punkte gekennzeichnet:



Im zweiten Teil der Aufgabe interessieren nur die Punkte, die genau auf der Gerade liegen (das „≤“ in der Gleichung $y \leq -1{,}8x + 20$ wird durch ein „=“ ersetzt.)

Graphisches Auswerten oder systematisches Probieren liefert die Punktpaare:

P_1 (0 / 20), da $20 = -1{,}8 \cdot 0 + 20$ → Sandra wählt keinen „Christbaum“ und 20 „Kerzen“.

P_2 (5 / 11), da $11 = -1{,}8 \cdot 5 + 20$ → Sandra wählt 5 Marken „Christbaum“ und 11 „Kerzen“.

P_3 (10 / 2), da $2 = -1{,}8 \cdot 10 + 20$ → Sandra wählt 10 Marken „Christbaum“ und 2 „Kerzen“.

Es gibt also drei Kombinationen, bei denen Markus den kompletten Betrag einsetzen kann.