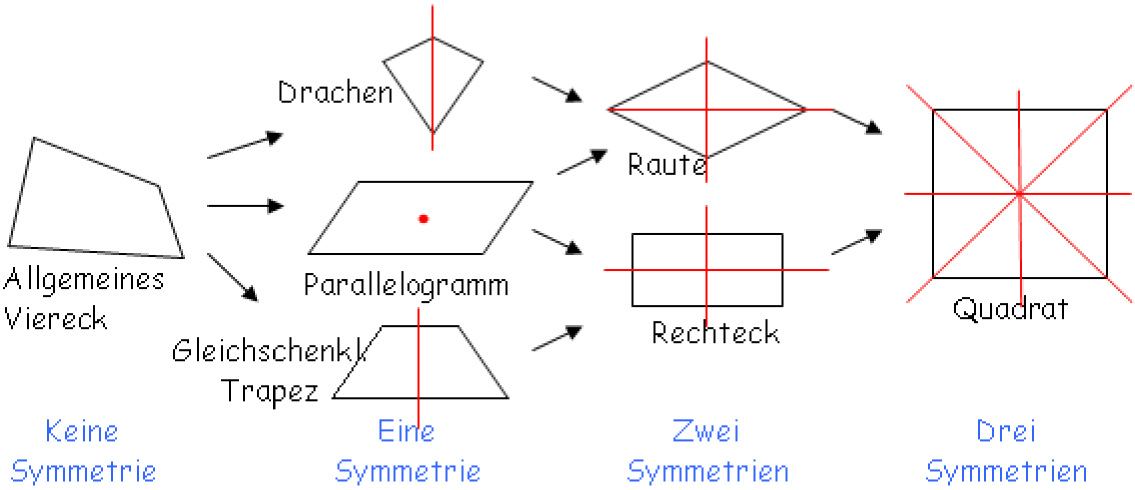
<u>Aufgabe 1:</u> Der Origamikurs

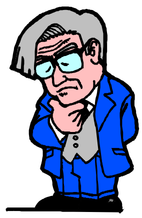
Jenny macht in den Ferien einen Origamikurs. Zu Beginn bekommen die Teilnehmer die Aufgabe, alle Achsen- und Punktsymmetrien von Vierecken ausfindig zu machen und geeignet darzustellen, um später daraus Figuren zu falten. Wie könnte eine solche Klassifikation aussehen?

Lösung:

Am übersichtlichsten ist es, wenn die Anordnung den Symmetrieeigenschaften folgt. Begonnen wird mit einem unsymmetrischen Viereck, dann folgen die Vierecke mit einer, mit zwei und schließlich mit drei Symmetrien:



<u>Aufgabe 2:</u> Diagonalen im Trapez



Halbiert in einem Trapez eine Diagonale die andere, so handelt es sich um ein Parallelogramm. Ist diese Aussage wahr?

Lösung:

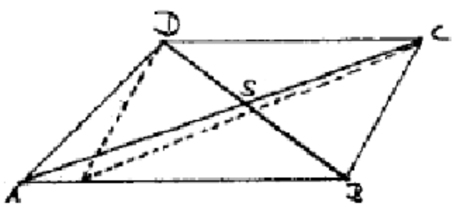
Die Aussage ist wahr! Beweis:

1. Lösungsvariante:

ABCD ist ein Parallelogramm, S ist der Schnittpunkt der Diagonalen. Da $\Delta ABS \cong \Delta CDS$, halbieren sich die Diagonalen.

→ Wenn ABCD ein Parallelogramm ist, halbieren sich die Diagonalen.

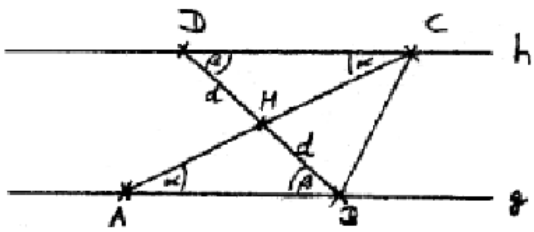
Verschiebt man den Punkt A auf der Geraden durch A und B, so verschiebt man S auf der Diagonalen BD (sehr schön z.B. mit Euklid zu demonstrieren!), d.h. der Punkt S kann nicht mehr Mittelpunkt von BD sein.



→ Wenn ABCD ein Trapez, aber kein Parallelogramm ist, halbieren sich die Diagonalen nicht.

Daraus folgt die Richtigkeit des Satzes: *Halbiert in einem Trapez eine Diagonale die andere, so handelt es sich um ein Parallelogramm.*

2. Lösungsvariante: (Begründung durch Konstruktion)



g und h sind zwei beliebige zueinander parallele Geraden, auf denen die Eckpunkte des zu konstruierenden Trapezes liegen sollen. Die Eckpunkte B auf g, bzw. C und D auf h werden beliebig gewählt.

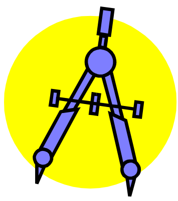
M ist der Mittelpunkt der Diagonalen BD. O.B.d.A. soll die Diagonale BD von der Diagonalen AC halbiert werden. Also muss der Schnittpunkt der Geraden durch M und C mit der Geraden g der Eckpunkt A des Trapezes sein.

Wie man aus der Skizze erkennt, stimmen die Dreiecke ABM und CDM in allen drei Winkeln überein (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, Scheitelwinkel). Außerdem ist die Strecke $\overline{DM}$ genauso lang wie die Strecke $\overline{MB}$. Daher gilt nach dem Kongruenzsatz WSW: $\Delta ABM \cong \Delta CDM$

→ $\overline{AB} = \overline{CD}$

→ ABCD ist ein Parallelogramm

(Dabei ist M auch der Mittelpunkt der Diagonalen AC.)



<u>Aufgabe 3:</u> Kreisaufgabe

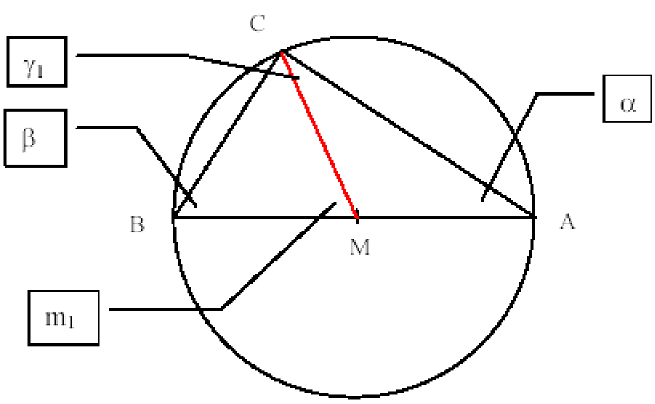
In einen Kreis ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben, so dass seine Hypothenuse AB gerade den Durchmesser bildet. Begründe: Wenn a= 30°, dann ist die Seite BC halb so lang wie die Seite AB.

Lösung:

Gegeben: ABC rechtwinklig, α = 30°

Gesucht: MB = BC

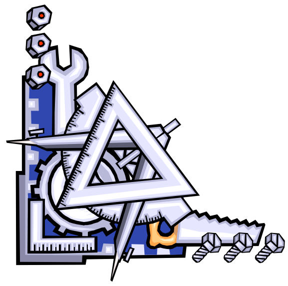
Informative Figur:



Lösungsplan: bei Begründungsaufgaben hilft oft kombiniertes Vorwärts-/Rückwärtsarbeiten:

Strategie	Feststellung	Begründung
Vorwärtsarbeiten	MB = MC (Hilfslinie)	beides Radien
Vorwärtsarbeiten	Dreieck MBC ist gleichschenklig	MB = MC
Vorwärtsarbeiten	$\beta = 60^\circ$	Winkelsummensatz im Dreieck
Vorwärtsarbeiten	$\gamma_1 = 60^\circ$	MBC gleichschenklig
Vorwärtsarbeiten	$m_1 = 60^\circ$	Winkelsummensatz im Dreieck
Rückwärtsarbeiten	alle Winkel in MBC betragen 60°	Definition von gleichseitig
Rückwärtsarbeiten	MBC gleichseitig	Definition von gleichseitig
Rückwärtsarbeiten	BC = MC = MB	Gesuchtes aus der Aufgabe

<u>Aufgabe 4:</u> Symmetrische Vierecke



Wir betrachten folgenden Satz: Wenn ein Viereck zu einer seiner Diagonalen symmetrisch ist, dann halbiert diese die andere Diagonale.

a) Gib den Kehrsatz an.

b) Welcher der Sätze ist falsch? Konstruiere ein Gegenbeispiel!

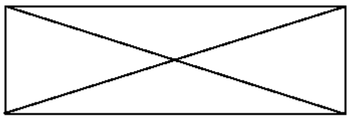
Welche zusätzliche Voraussetzung muss gelten damit der Satz stimmt?

Lösung:

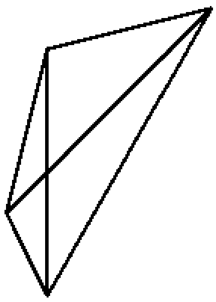
a) Kehrsatz: *Wenn eine Diagonale eines Vierecks die andere halbiert, dann ist das Viereck zu dieser Diagonale symmetrisch.*

b) Der Kehrsatz stimmt nicht! Gegenbeispiele:

(1) Rechteck mit unterschiedlich langen Seiten:



(2) Die vertikale Diagonale wird von der anderen Diagonale halbiert:



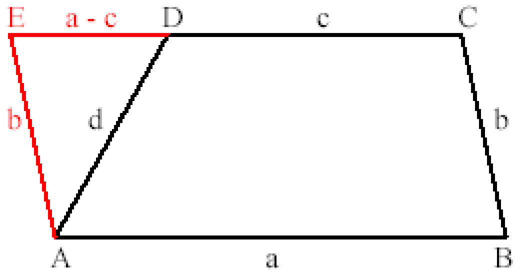
Wenn man zusätzlich fordert, dass die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen sollen, stimmt der Kehrsatz: *Wenn man die Diagonalen eines Vierecks senkrecht aufeinander stehen und eine Diagonale die andere halbiert, dann ist das Viereck zu dieser Diagonalen symmetrisch.*

Aufgabe 5: Trapez-Konstruktion

Konstruiere ein Trapez mit den Seitenlängen a =8 cm, b = 5cm, c = 4cm und d = 6cm.

Lösung:

Bei Konstruktionsaufgaben sollte man zunächst eine Skizze (informative Figur) anfertigen und einen Konstruktionsplan entwickeln – das ist besonders wichtig, wenn es sich wie hier um anspruchsvollere Konstruktion handelt.



Da sich das Trapez nicht direkt konstruieren lässt, ist die entscheidende Idee hier, aus der Figur hinauszugehen und sie zu einem Parallelogramm zu erweitern (Hilfslinien rot gezeichnet). Man sieht, dass alle Seitenlängen bekannt sind. Zunächst kann nun das Dreieck ADE konstruiert werden. Dann verlängert man die Strecke ED über D hinaus um die Länge von c (4 cm) und erhält so die Strecke c und den Punkt C. Durch C konstruiert man die Parallele zu AE und durch A die Parallele zu CD, der Schnittpunkt ist B. Fertig.

Genauso gut hätte man das Trapez natürlich auch auf der anderen Seite (rechts) zu einen Parallelogramm ergänzen können.