

## Aufgabe 1: Arzneimittel

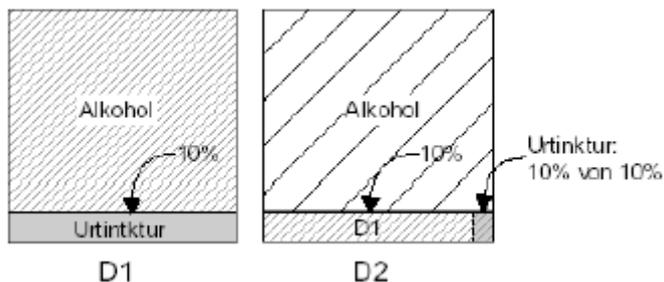
In der Homöopathie hat man festgestellt, dass manche Stoffe besser wirken, wenn sie nur in geringen Anteilen im Arzneimittel vorkommen. So wird auch heute noch ein Teil der Urtinktur (beispielsweise der alkoholische Auszug einer Pflanze) verschüttelt mit neun Teilen eines vorgeschriebenen Alkohols. Die Urtinktur kommt dann also zu 10% in der Mischung vor (D1-Mischung). Um nun die Mischung D2 zu erhalten, wird ein Teil der D1-Mischung mit weiteren neun Teilen des vorgeschriebenen Alkohols vermischt. Um D3 zu bekommen, wird schließlich genauso mit D2 verfahren, usw.



In welcher Mischung beträgt der Anteil 1 Promille, 1ppm, 1ppb?

### **Lösung:**

Eine Invariante steckt in den Übergängen von einer zur nächsten Mischung. Bei jedem einzelnen Mischvorgang wird nur noch  $1/10$  der vorangegangenen Urtinkturmenge weiter verwendet. Die informative Figur „Fläche“ kann helfen, diese Invariante zu finden. Da Schüler Flächen schon zuvor zur Problemlösung eingesetzt haben, sollte es nicht zu schwierig sein, hier ein Bild etwa der folgenden Art zu zeichnen:



Es lässt sich daran als Invariante der Konstante Faktor  $1/10$  ablesen.

Somit lässt sich folgende Tabelle aufstellen:

<b>Mischung</b>	<b>Anteil Urtinktur</b>
D1	$1/10$
D2	$1/100$
D3	$1/1.000 = 1 \text{ Promille}$
D4	$1/10.000$
D5	$1/100.000$
D6	$1/1.000.000 = 1 \text{ ppm}$
D7	$1/10.000.000$
D8	$1/100.000.000$
D9	$1/1.000.000.000 = 1 \text{ ppb}$

Die gesuchten Mischungen sind D3 (1 Promille), D6 (1ppm) und D9 (1ppb).

## Aufgabe 2: KIBA-Aufgabe

Mareike mixt KIBA: Sie nimmt 0,2 l Bananennektar mit 25 % Fruchtgehalt und gießt vorsichtig 0,1 l Sauerkirsch-Nektar mit 50 % Fruchtgehalt dazu. Welchen Fruchtgehalt hat der entstehende KIBA-Drink?



### **Lösung:**

Bei dieser Mischungsaufgabe kann das Hilfsmittel „Tabelle“ wieder aufgegriffen werden:

	Bananennektar	Kirschnektar	Kiba (Mischung)
Menge in l	0,2	0,1	<i><math>0,2 + 0,1 = 0,3</math></i>
Fruchtgehalt in l	<i><math>0,2 \cdot 25 : 100 = 0,05</math></i>	<i><math>0,1 \cdot 50 : 100 = 0,05</math></i>	<b><math>0,05 + 0,05 = 0,1</math></b>
Fruchtgehalt in %	25	50	<b><math>0,1 : 0,3 \cdot 100 = 33\frac{1}{3}</math></b>

Aus den gegebenen Daten lassen sich die kursiv gedruckten Zellen direkt berechnen. Mit Hilfe dieser Werte lassen sich dann die fett gedruckten, gesuchten Zellen berechnen.

Mareikes KIBA-Drink hat einen Fruchtgehalt von rund 33,3%.

## Aufgabe 3: Legierungen



Manche Metalle besitzen die Fähigkeit, sich in geschmolzenem Zustand ineinander "aufzulösen". Erstarrte Schmelzen dieser Art heißen Legierungen. Die Eigenschaften der Legierungen weichen oft erheblich von denen der Einzelmetalle ab.

Der Inhaber eines Schmuckgeschäftes möchte seine Legierungen erstmals selbst schmelzen. Er beginnt mit Messing, einer Kupfer-Zink-Legierung. Wie viel Kilogramm Zink und wie viel Kilogramm Messing mit einem Zinkanteil von 10% muss er verschmelzen, um 25kg Messing mit einem 30%igen Zinkanteil zu erhalten?

### **Lösung:**

Lösung mittels Tabelle:

Stoff	Gesamtmasse in kg	Zinkanteil in kg
Zink	x	x
Messing mit 10% Zink	25 - x	$(25 - x) / 10$

30% Zink von 25kg Messing sind 7,5kg Zink.

Die zu lösende Gleichung lautet demnach:  $[(25 - x) / 10] + x = 7,5$

Daraus erhält man  $x = 50 / 9 = 5,56$

$25\text{kg} - 5,56\text{kg} = 19,44\text{kg}$

Der Mann benötigt also 5,56kg Zink und 19,44kg Messing mit 10% Zink.

#### Aufgabe 4: Wasser und Wein



Vor dir stehen zwei Gläser. In einem Glas befindet sich Wasser, in dem anderen das gleiche Volumen Wein. Aus dem Wasserglas entnimmt man einen Esslöffel Wasser, gießt diesen in den Wein, und nachdem man die Flüssigkeiten gut umgerührt hat, entnimmt man dem Weinglas einen Esslöffel Gemisch und gießt es in das Wasserglas zurück. Befindet sich jetzt mehr Wasser im Weinglas als Wein im Wasserglas?

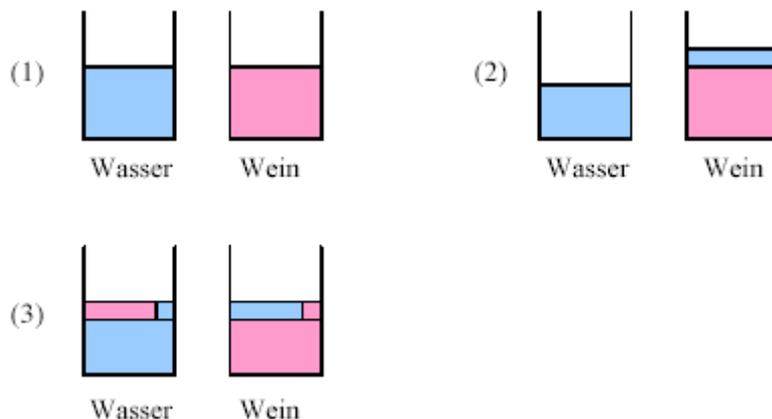
#### **Lösung:**

Zunächst gehen wir davon aus, dass sich in beiden Gläsern gleich viel Flüssigkeit befindet. In Klasse 8 kann das Problem allgemein betrachtet werden: Zuerst befindet sich im Wasserglas  $x$  Liter Wasser und im Weinglas  $x$  Liter Wein (1).

Nun werden aus dem Wasserglas  $p$  Liter Wasser entnommen und ins Weinglas gegeben (2). Der Wasseranteil beträgt also  $p / (x + p)$  der Weinanteil  $x / (p + x)$

Nun werden aus dem Weinglas  $p$  Liter der Wein-Wasser-Mischung entnommen und ins Wasserglas gegeben (3). Davon sind  $[x / (x + p)] * p$  Liter Wein.

Auch im Weinglas befinden sich am Ende wieder  $x$  Liter Flüssigkeit. Da sich der Wasseranteil nicht mehr geändert hat, befinden sich also  $[p / (x + p)] * x$  Liter Wasser im Weinglas. Es befindet sich am Ende also genauso viel Wasser im Weinglas wie Wein im Wasserglas.



#### Aufgabe 5: Das Geschenk der Patentante

Zum 12. Geburtstag bekommst du von deiner Patentante nichts geschenkt, sondern nur 5000€ geliehen. Du darfst aber keinen Cent davon haben, um davon etwas zu kaufen. Stattdessen sollst du das Geld gewinnbringend aber ohne Verlustrisiko anlegen und an deinem 18. Geburtstag wieder zurückgeben.



„Unverschämtheit“, geht es dir zuerst durch den Kopf. Trotzdem fängst du an, dir über die Randbedingungen Gedanken zu machen. Deine Patentante sagt: „Wenn du das Geld gut angelegt

hast, reicht der Zinsgewinn vielleicht für deinen Autoführerschein.“ Der Führerschein kostet ca. 1500€ und folgende Anlagemöglichkeiten werden dir von deiner Bank angeboten:

<p style="color: red; text-align: center;">Anlagemöglichkeit 1</p> <p style="color: red; text-align: center;">Feste Verzinsung bei 4% bei einer Laufzeit von 6 Jahren.</p>	<p style="color: green; text-align: center;">Anlagemöglichkeit 2</p> <p style="color: green; text-align: center;">Jährlich 5% der Anfangseinlage bei einer Laufzeit von 6 Jahren</p>	<p style="color: blue; text-align: center;">Anlagemöglichkeit 3</p> <p style="color: blue; text-align: center;">Steigende Zinssätze von 2%, 3%, 4%, 5%, 6% und 7% in den 6 Jahren des Anlagezeitraums.</p>
--	--	--

- (a) Wie lauten die Endbeträge nach deinem 18. Geburtstag? Reicht das für den Führerschein?  
 (b) Skizziere jeweils die Kapitalentwicklung absolut und die Veränderung der effektiven Jahreszinsen in geeigneten Graphen.  
 (c) Welche Konzepte der Anlagemöglichkeiten sind für kürzere, welche sind für längere Zeit gewinnbringender? Begründe deine Überlegungen!

**Lösung:**

(a)

Anlagemöglichkeit 1:

$$K_1 = (1,04^6 \cdot 5000\text{€}) - 5000\text{€} \approx 1327\text{€}$$

Anlagemöglichkeit 2:

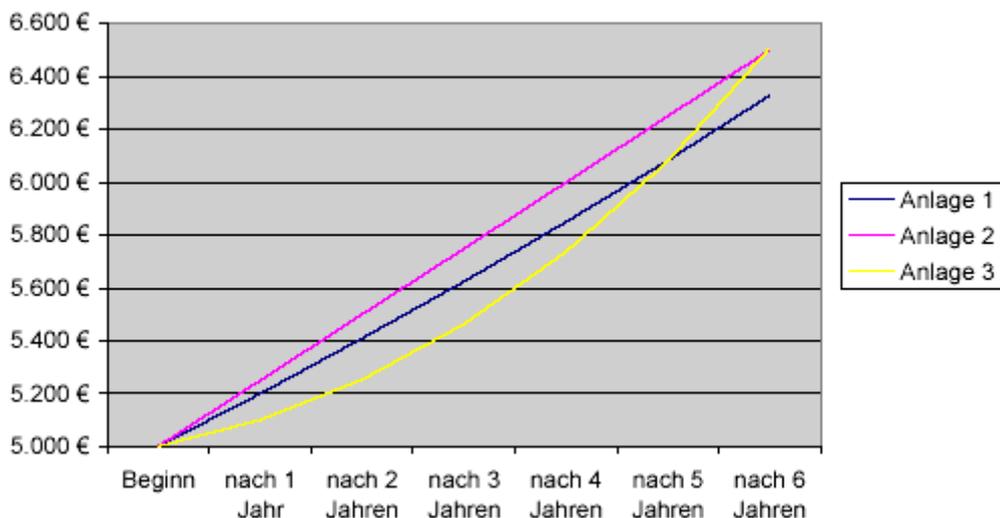
$$K_2 = 6 \cdot 0,05 \cdot 5000\text{€} = 1500\text{€}$$

Anlagemöglichkeit 3:

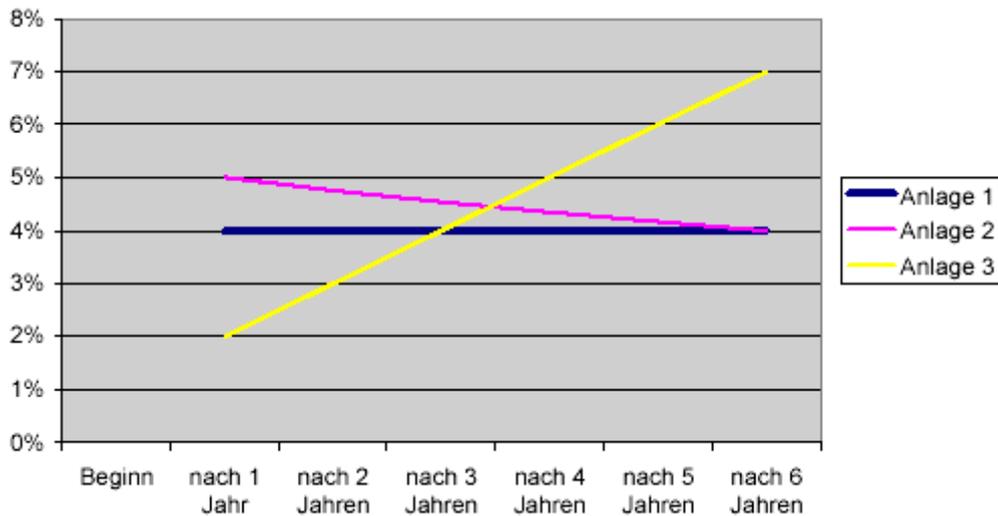
$$K_3 = (1,02 \cdot 1,03 \cdot 1,04 \cdot 1,05 \cdot 1,06 \cdot 1,07 \cdot 5000\text{€}) - 5000\text{€} \approx 1506\text{€}$$

Der Gewinn der Anlagemöglichkeiten 2 und 3 wird für die Finanzierung des Führerscheins reichen. Am lukrativsten erscheint Anlagemöglichkeit 3.

(b) Für die Entwicklung des Kapitals ergibt sich das folgende Bild: (z.B. aus einer Wertetabelle)



Die Zinsen entwickeln sich auf folgende Weise:



(c) Diese Frage lässt sich gut anhand der zweiten Graphik aus Aufgabe (b) beantworten: In den ersten drei Jahren hat Anlage 2 den höchsten Prozentsatz. Für kürzere Anlagephasen ist diese also vorzuziehen. Allerdings sinkt der Prozentsatz stetig, womit bei längeren Anlagephasen hiervon abzuraten ist. Anlage 3 beginnt bei einem niedrigen Prozentsatz, der sich aber mit jedem Jahr um 1% vergrößert. Somit ist diese Anlage für kurze Anlagephasen ungeeignet, für längere aber sehr. Allerdings ist es fraglich, ob eine Bank ein solches Angebot auch für einen größeren Zeitraum als 6 Jahre anbieten würde.

Bei einer kurzen Anlagephase ist Anlage 1 geeigneter als Anlage 3, da der Prozentsatz höher ist. Bei einer längeren Anlagephase ist Anlage 1 geeigneter als Anlage 2, da der Prozentsatz von Anlage 2 sinkt, während der von Anlage 1 konstant bleibt.