LANGFRISTIGE HAUSAUFGABE (LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME)

<u>Aufgabe 1:</u> Tanzkurs (*)

Zu einem Tanzkurs erscheinen dreimal so viele Mädchen wie Jungen. Nachdem 15 Mädchen gegangen sind, sind noch doppelt so viele Mädchen wie Jungen da. Wie viele Jungen und Mädchen waren insgesamt anwesend?

<u>Aufgabe 2:</u> Anders herum (*)

Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, das die eindeutige Lösung $x = -3$ und $y = 0{,}2$ besitzt.

<u>Aufgabe 3:</u> Kneipe (**)

Ein Gastwirt bestellt für 1600 € Tische und Stühle für sein Lokal. Insgesamt sind es 54 Teile. Ein Tisch kostet 50 € ein Stuhl die Hälfte davon. Wie viele Tische wurden bestellt?

<u>Aufgabe 4:</u> Bergwanderung (**)

Eine Wandergruppe startet um 9 Uhr eine Tageswanderung vom „Talsee“ über das 10 km entfernte „Forstgasthaus“ zur „Steinberghütte“ und legt dabei 4 km in der Stunde zurück. Eine zweite Wandergruppe beginnt am gleichen Tag um 8 Uhr an der „Steinberghütte“ ihre Tageswanderung über das 18 km entfernte „Forstgasthaus“ zum „Talsee“ und legt 5 km pro Stunde zurück.
Wann und wo begegnen sich die Gruppen?

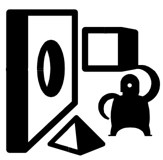
WAHLAUFGABEN

Wähle mindestens zwei der folgenden vier Aufgaben aus, und bearbeite sie!

<u>Aufgabe 5</u>: Lösungsmengen (**)

Untersuche die folgenden LGS auf Lösbarkeit und gib gegebenenfalls die Lösungsmenge an!

(I)	(II)	(III)
$0{,}25x - 7y = -2$	$-x + 5y = 12$	$3x - 6y = 9$
$-2x + 56y = 1$	$4x - 3y = -18$	$x - 2y = 3$



<u>Aufgabe 6:</u> Kranarbeiten (*)**

Zwei Kräne brauchen zusammen vier Stunden, um ein Schiff zu beladen. Nach einer Stunde fällt ein Kran aus. Der andere Kran benötigt dann alleine noch weitere 5 Stunden, um das Schiff zu beladen. Wie lange würde jeder Kran alleine brauchen?

<u>Aufgabe 7:</u> Schwimmbecken (*)**

Susi hat im Garten ein Schwimmbecken aufgestellt. Um es zu füllen, stehen ihr drei Hähne zur Verfügung. Leider hat sie nur zwei Schläuche, so dass nur zwei Hähne gleichzeitig laufen können. Werden Hahn 1 und 2 verwendet, dauert die Befüllung 2 Stunden. Mit Hahn 2 und 3 werden 3 Stunden, mit Hahn 1 und 3 dagegen 2,5 Stunden benötigt. Susi fragt sich: „Wie lange würde es wohl dauern, wenn mir noch ein dritter Schlauch zur Verfügung stünde?“

<u>Aufgabe 8:</u> Flugzeug (*)**

Ein Flugzeug fliegt bei Gegenwind von Frankfurt nach München (400 km). Für die Strecke benötigt es 60 Minuten. Für den Rückweg mit Rückenwind und gleicher Windgeschwindigkeit braucht es nur 48 Minuten. Überlege dir eine sinnvolle Fragestellung, die sich mit Hilfe der gegebenen Daten beantworten lässt. Löse dann deine Aufgabe!

Viel Erfolg beim Lösen dieser Hausaufgabe!

Notiere zum Schluss noch, wie viel Zeit du für die Bearbeitung gebraucht hast:

ca. ☐ ***Stunden***

LÖSUNGSVORSCHLÄGE:

<u>Aufgabe 1:</u> Tanzkurs

Sei M die Anzahl der Mädchen und J die der Jungen. Dann ist: $M = 3J$

$M - 15 = 2J$

Als Lösung erhält man $3J - 15 = 2J \Rightarrow J = 15$. Es waren 15 Jungen und 45 Mädchen anwesend.

<u>Aufgabe 2:</u> Anders herum

Die Aufgabe besitzt mehr als eine Lösung. Eine mögliche Lösung ist:

$$x + 10y = -1$$
$$2x + 40y = 2$$

<u>Aufgabe 3:</u> Kneipe

Bezeichne x die Anzahl der Tische und y die der Stühle. Damit lässt sich ein LGS aufstellen:

$$x + y = 54$$
$$50x + 25y = 1600$$

Als Lösung erhält man $x = 10$ und $y = 44$. Der Wirt hat 10 Tische und 44 Stühle bestellt.

<u>Aufgabe 4:</u> Bergwanderung

Lösung mit linearem Gleichungssystem: Wählt man t als Zeit (in Stunden ab 8 Uhr) und s (als Weg in km) ab dem Talsee, so lässt sich für jede der beiden Gruppen eine Gleichung aufstellen:

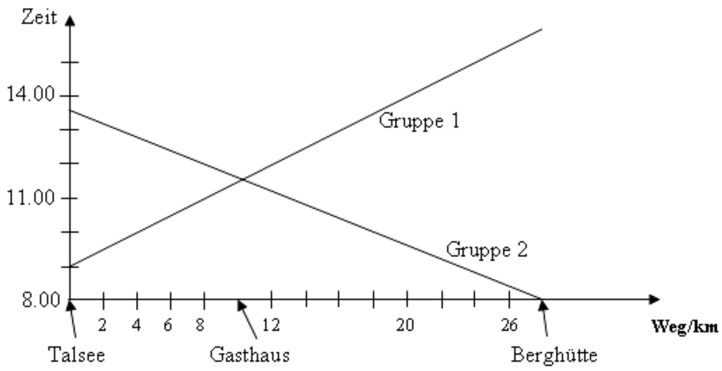
Gruppe 1: $s = 28 - 5t$

Gruppe 2: $s = 4(t - 1)$

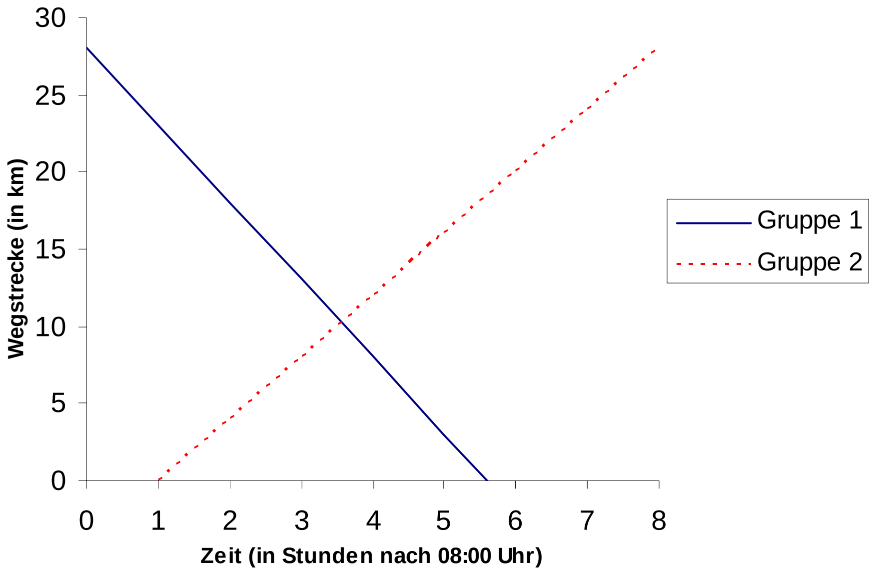
Beim Aufstellen der Gleichungen kann eine graphische Veranschaulichung der Situation (informative Figur) von großem Nutzen sein. Durch Gleichsetzen der Ausdrücke erhält man als Lösung den Treffpunkt: Die Gruppen treffen sich 10,2 km vom Talsee entfernt um 11.33 Uhr.

Lösung mit dem Invarianzprinzip: Die Gruppen kommen sich mit einer Geschwindigkeit von 9 km/h entgegen. Dies ist eine Invariante. Um 9 Uhr hat die zuerst gestartete Gruppe noch 23 km vor sich. Von diesem Zeitpunkt ab dauert es also noch (23 km) / (9 km/h) = 23/9 h = 2 h 33 min. Die Gruppen treffen sich um 11.33 Uhr. Die Strecke kann man bestimmen, indem man den Weg berechnet, die die langsamere Gruppe, die am Talsee startet in dieser Zeit zurücklegt: s = 4 km/h $\cdot$ 23/9 h = 10,2 km.

Graphische Lösung: Trägt man die gegebenen Daten in ein Koordinatensystem ein, kann man daraus eine Näherungslösung direkt abgelesen: Die Gruppen treffen sich um etwa 11.30 Uhr in der Nähe des Forstgasthauses.



Die Achsen des Koordinatensystems können auch vertauscht werden, um die übliche Darstellung der Wegstrecke als Funktion der Zeit zu erhalten:



Aufgabe 5:

(I) Die Lösungsmenge des LGS ist die leere Menge: Multipliziert man die obere Gleichung mit (–8) erhält man: $-2x + 56y = -16$

$-2x + 56y = 1$

Da die linken Seiten übereinstimmen, können die rechten Seiten gleichgesetzt werden. Man erhält den Widerspruch $-16 = 1$. Das Gleichungssystem ist daher nicht lösbar.

(II) Das LGS ist eindeutig lösbar. Als Lösung erhält man $x = -\frac{54}{17}$ und $y = \frac{30}{17}$.

(III) Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen. Alle Lösungspaare liegen auf einer Geraden, deren Funktionsgleichung angegeben werden kann: aus $3x - 6y = 9$ folgt $y = 0{,}5x + 1{,}5$.

Aufgabe 6:

Lösungsweg mit LGS: Folgende Variablenwahl bietet sich an:

x: Anteil der Arbeit, die der ausfallende Kran pro Stunde schafft

y: Anteil der Arbeit, die der übrig bleibende Kran pro Stunde schafft

Der Anteil an der gesamten Arbeit, die ein Kran pro Stunde erledigen kann, ist eine Invariante. Mit den Bedingungen aus der Aufgabenstellung erhält man das folgende lineare Gleichungssystem:

$$1 = 4x + 4y$$
$$1 = 1x + 6y$$

Dieses LGS besitzt die Lösung $x = \frac{1}{10}$ und $y = \frac{3}{20}$. Daraus folgt, dass der ausfallende Kran alleine 10 Stunden, der andere Kran alleine 20/3 Stunden beziehungsweise 6 Stunden und 40 Minuten bräuchte.

Lösungsweg ohne Gleichungssystem: Wenn beide Kräne zusammen 4 Stunden für die gesamte Arbeit brauchen, schaffen sie in einer Stunde zusammen ein Viertel der Arbeit.

Der übrig gebliebene Kran braucht also für drei Viertel der Arbeit 5 Stunden, für die gesamte Arbeit also $5h \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$ h = 6h 40min. In vier Stunden schafft er also $4h : \frac{20}{3}$ h = $\frac{3}{5}$ der Arbeit. Der ausgefallene Kran schafft $\frac{2}{5}$ der Arbeit in 4 Stunden und bräuchte 10 Stunden für die gesamte Arbeit.

<u>Aufgabe 7:</u> Schwimmbecken

Seien x, y und z wie oben die Füllgeschwindigkeiten der Hähne 1, 2 und 3. Dann erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 1 \\ 3y + 3z &= 1 \\ 2{,}5x + 2{,}5z &= 1 \end{aligned}$$

Man erhält (z.B. über den GAUSS-Algorithmus) die Lösung: $x = \frac{17}{60}$, $y = \frac{13}{60}$ und $z = \frac{7}{60}$.

Pro Stunde wird der Bruchteil $\frac{17}{60} + \frac{13}{60} + \frac{7}{60} = \frac{37}{60}$ des Beckens gefüllt, das ganze Becken würde somit in $\frac{60}{37}$ Stunden, also in etwa 1,5 Stunden (97 min) gefüllt.

Die Anschaffung eines dritten Schlauches würde eine Zeitersparnis von 23 Minuten bringen.

<u>Aufgabe 8:</u> Flugzeug

Mit den gegebenen Daten könnte man sowohl die Windgeschwindigkeit als auch die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges berechnen. Invarianten für Hin- und Rückflug sind die Strecke, die Windgeschwindigkeit und die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges. Eine weitere Invariante ist der Zusammenhang: „*Strecke gleich (konstante) Geschwindigkeit mal Zeit*" ($s = v \cdot t$).

Da die Geschwindigkeiten für Hin- und Rückflug nicht gleich sind, bietet es sich an, die Fälle „Hinflug" und „Rückflug" zu unterscheiden. Beim Aufstellen der Gleichung kann eine Tabelle als Strukturierungshilfe nützlich sein:

Fall	*Geschwindigkeit*	*Zeit in Stunden*	*Strecke in km*	*Gleichung*
1. „Hinflug"	**v - w**	1	400	(v – w)•1 = 400
2. „Rückflug"	**v + w**	0,8	400	(v + w)•0,8 = 400

Dabei ist v die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs und w die Windgeschwindigkeit. Jede Zeile ergibt mit dem Zusammenhang „*Geschwindigkeit mal Zeit gleich Strecke*" eine lineare Gleichung.

Die Lösung des LGS ist v = 450 km/h und w = 50 km/h.

Alternativer Lösungsweg: Fixiert man sich nicht auf lineare Gleichungssysteme, kann die Aufgabe anders gelöst werden. Dazu berechnet man direkt die Geschwindigkeiten für Hin- und Rückflug:

$v_{Hin} = \frac{400\text{ km}}{1\text{ h}} = 400 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ $\qquad$ $v_{Rück} = \frac{400\text{ km}}{0{,}8\text{ h}} = 500 \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges entspricht dem arithmetischen Mittel der beiden Geschwindigkeiten. Die Windgeschwindigkeit erhält man durch Differenzenbildung aus der Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges und der Geschwindigkeit beim Hinflug.