



Aufgabe 1: Malerarbeiten

Fritz braucht zwei Stunden, um ein Zimmer zu streichen. Susi braucht für das gleiche Zimmer drei Stunden. Wie lange brauchen beide zusammen, um das Zimmer zu streichen?

Lösung:

Lösungsweg mit Hilfe des Invarianzprinzips:

Als Invariante kann man die Anzahl der Zimmer, die beide in einer Stunde streichen könnten, wählen. Fritz kann in einer Stunde ein halbes Zimmer streichen, Susi kann in einer Stunde ein Drittel des Zimmers streichen. Beide zusammen können pro Stunde also $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ Zimmer streichen. Das ist eine Invariante. Für ein ganzes Zimmer benötigen sie also $\frac{6}{5}$ Stunden (72 Minuten.)

Lösungsweg mit Hilfe einer Gleichung:

Wahl der Variablen: t sei die zum Streichen benötigte Zeit in Stunden. Dann gilt $\frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{3} \cdot t = 1$. Als Lösung für t erhält man $\frac{6}{5}$. Um die Aufgabe mit Hilfe dieser einfachen Gleichung zu lösen, muss die Anzahl der Zimmer, die jeder der beiden pro Stunde streicht, als Invariante erkannt werden.

Lösungsweg mit Hilfe der Strategie „Rückwärtsarbeiten“:

Die Strategie „Rückwärtsarbeiten“ lässt sich ebenfalls auf die Aufgabe anwenden. Dabei geht man davon aus, das Gesuchte (in diesem Falle die Zeit) zu kennen, und untersucht, was mit Hilfe dieser Größe bestimmt werden kann. Hier kann man sich überlegen, wie viele Zimmer Fritz und Susi in einer vorgegeben Zeit t gemeinsam streichen können. Gelingt es, den Zusammenhang „Zeit – Anzahl der gestrichenen Zimmer“ durch eine Gleichung auszudrücken, kann mit Hilfe dieser Gleichung dann auch sofort die ursprüngliche Gleichung gelöst werden.

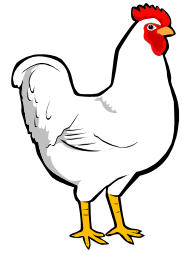
Der Vorteil dieses Ansatzes ist, dass man ausgehend von der Zeit leichter auf die Idee kommt, sich zu überlegen, wie viele Zimmer beide jeweils in einer Stunde streichen können. Dies erleichtert das Entdecken der entscheidenden Invariante.

Verwendungsvorschlag für die Aufgabe:

Bei dieser Aufgabe sind verschiedene Lösungsansätze unter Ausnutzung verschiedener heuristischer Methoden (Invarianzprinzip, Gleichung, Rückwärtsarbeiten) möglich. Deshalb eignet sie sich für die Bearbeitung im Unterricht zwecks Vorstellung und Diskussion der verwendeten heuristischen Methoden. Da lineare Gleichungen und lineare Gleichungssysteme meist am Anfang der neunten Klasse behandelt werden, kann an dieser leicht nachvollziehbaren und vom Rechenaufwand her einfachen Aufgabe das Invarianzprinzip vorgestellt werden, wenn es den Schülern nicht bereits aus früheren Klassenstufen bekannt ist. Es sollte dann später an anderen Aufgaben wiederholt werden, da es ein sehr weit gefasstes Prinzip mit zahlreichen unterschiedlichen Anwendungsmöglichkeiten ist.

Aufgabe 2: Das Problem der 100 Vögel

Diese Aufgabe stammt vom chinesischen Mathematiker Ch'iu-chien (um 485 n. Chr.): „Ein Hahn kostet 5 Sapeks, eine Henne 3 Sapeks und 3 Küken einen Sapek. Wie viele Hähne, Hennen und Küken, insgesamt 100, kosten 100 Sapeks?“



Lösung:

Diese Aufgabe führt auf ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen:

x: Anzahl der Hähne, y: Anzahl der Hennen, z: Anzahl der Küken

$$x + y + z = 100$$

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$$

Dieses Gleichungssystem hat über der Menge der rationalen oder reellen Zahlen unendlich viele Lösungen. Hier kommen aber nur ganze, nicht negative Zahlen als Lösung in Frage. Beim Auffinden aller Lösungsmöglichkeiten empfiehlt es sich zunächst, das Gleichungssystem durch Eliminierung einer Variablen zu vereinfachen. Die Eliminierung von z und anschließendes Umsortieren führen zu folgender Gleichung:

$$14x + 8y = 200$$

$$\Rightarrow y = \frac{200 - 14x}{8} \quad (1)$$

Die ganzzahligen, nicht negativen Lösungen können mit Hilfe einer Tabelle aufgefunden werden:

x (Anzahl der Hähne)	y (Anzahl der Hennen)	z (Anzahl der Küken)
0	25	75
4	18	78
8	11	81
12	4	84

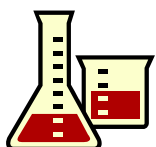
Dabei verändert man eine Variable (hier x) und berechnet die andere (hier y).

Man kann nach dem Prinzip „Versuch und Irrtum“ vorgehen und beginnend mit Null für x alle ganzen, nicht negativen Zahlen einsetzen bis y negativ wird, und die Zeilen streichen, in denen y nicht ganzzahlig ist. Geschickter ist allerdings, sich zunächst anhand von Gleichung (1) überlegen, dass x durch 4 teilbar sein muss, damit y ganzzahlig wird. Die größtmögliche durch 4 teilbare Lösung ist x = 12, denn für x = 16 würde y negativ.

Verwendungsvorschlag für die Aufgabe:

Die Aufgabe mag als Beispielaufgabe dafür dienen, wie eine Tabelle als Hilfsmittel zum systematischen Probieren verwendet werden kann.

Aufgabe 3: Im Chemielabor



Für eine Synthese werden 20 Liter 40%ige Salzsäurelösung benötigt. Da diese nicht

vorrätig ist, soll sie aus 30%iger und 95%iger Lösung gemischt werden. Kannst du helfen?

Lösung:

Lösungsweg mit Hilfe einer Tabelle:

	Menge [Liter]	Salzsäureanteil in %	Salzsäureanteil in Litern
30%ige Lösung	x	30	0,3x
95%ige Lösung	y	95	0,95y
Mischung	20	40	0,4•20 = 8

Unbekannte Größen sind fett gedruckt, Größen, die sich unmittelbar aus den Angaben berechnen lassen, sind kursiv gedruckt.

Beim Aufstellen der Tabelle kann das Invarianzprinzip hilfreich sein. Bei Mischungsaufgaben bleibt meist vor und nach dem Mischen etwas unverändert. Hier ist das einerseits das Gesamtvolumen oder die Summe der Mengen der Lösungen vor und nach dem Mischen und andererseits das Volumen der reinen Säure vor und nach dem Mischen. Für jede dieser Größen lässt sich also eine Gleichung aufstellen. Die Tabelle dient dabei als strukturierendes Hilfsmittel. In die Spalten schreibt man die als Invarianten erkannten Größen. Die Spalte „Salzsäureanteil in %“ ist nur eine Hilfsspalte zur Berechnung der Spalte „Salzsäureanteil in Litern“. Für die erste Spalte ergibt sich $x + y = 20$, für die letzte ergibt sich $0,3x + 0,95y = 8$. Die Lösung dieses Gleichungssystems ist $x = 16,9$ und $y = 3,1$.

Man muss 16,9 l der 30%igen Säure mit 3,1 l der 95%igen Säure mischen, um 20 Liter 40%ige Säure zu erhalten.

Verwendungsvorschlag für die Aufgabe:

Mischungsaufgaben im weiteren Sinne können in unterschiedlicher Form in verschiedenen Klassenstufen verwendet werden, insbesondere im Rahmen des Themengebietes „Lineare Gleichungen“. Die vorliegende Aufgabe kann als Beispielaufgabe verwendet werden, um zu zeigen, wie eine Tabelle als Hilfsmittel beim Aufstellen eines linearen Gleichungssystems verwenden kann. Dieses Verfahren lässt sich auch bei vielen anderen Aufgabentypen anwenden. Gleichzeitig kann die Aufgabe als Beispielaufgabe für das Invarianzprinzip dienen.

Aufgabe 4: Legierungen

Der Feingehalt einer Gold- oder Silberlegierung wird in 1000 Teilen angegeben.

Reines Gold bzw. Silber hat den Feingehalt 1000.

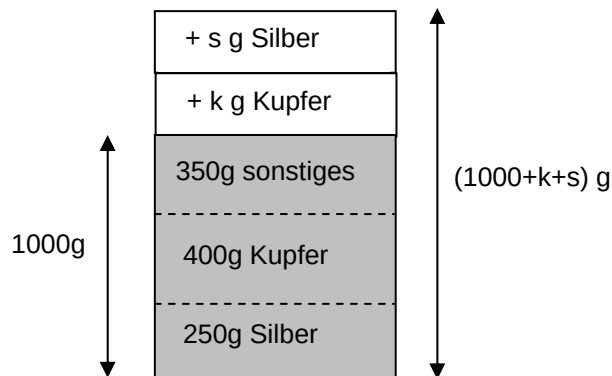
Eine Silberlegierung vom Feingehalt 250 enthalte neben weiteren Metallen auch 40%

Kupfer. Wie viel reines Silber und wie viel reines Kupfer müssen zu 1000 g dieser Legierung hinzugefügt werden, damit sie nachher den Feingehalt 300 besitzt und 50% Kupfer enthält?



Lösung:

Lösungsweg mit Hilfe einer informativen Figur:



Veranschaulicht man sich die Situation mit einer informativen Figur, in der die Legierung beispielsweise als Fläche (Rechteck) oder Strecke gezeichnet werden kann, fällt es leichter Gleichungen aufzustellen, mit denen man die nötigen Mengen an Kupfer (k) und Silber (s) bestimmen kann. Dabei empfiehlt es sich, alle Massen in Gramm anzugeben. Beim Aufstellen der Gleichungen hilft darüber hinaus das Zerlegungsprinzip. Man betrachtet erst eine der beiden Forderungen, beispielsweise den Silbergehalt der neuen Legierung. Die Masse des Silbers in der neuen Legierung beträgt $250 + s$, ihre Gesamtmasse beträgt $1000 + k + s$ (siehe obige Skizze), die Forderung lautet also $250 + s = \frac{300}{1000} (1000 + k + s)$. Analog lässt sich für den geforderten Kupferanteil die Gleichung $400 + k = \frac{50}{100} (1000 + k + s)$ aufstellen. Somit hat man das Problem auf ein LGS zurückgeführt. Als Lösung erhält man $s = 275$ und $k = 475$.

Lösungsweg mit Hilfe einer Tabelle:

In Analogie zu anderen Mischungsaufgaben kann beim Aufstellen der Gleichungen natürlich auch das Hilfsmittel Tabelle nützlich sein:

	Anteil in %	„alte“ Legierung [Gramm]	„neue“ Legierung [Gramm]	Anteil in %
Kupfer	40	400	400 + k	50
Silber	25	250	250 + s	30
andere Metalle	35	350	350	20
Summe	100	1000	1000 + k + s	100

Unbekannte Größen sind fett gedruckt; Größen, die sich unmittelbar aus den Angaben berechnen lassen, sind kursiv gedruckt. In die erste Spalte wurden die Anteile geschrieben, die in der vorgegebenen Legierung vorliegen. Daraus lassen sich problemlos die zugehörigen Massen (Gramm) anhand der gegebenen Gesamtmasse berechnen (zweite Spalte). Diese werden für die neue Legierung gemäß der Aufgabenstellung um k Gramm Kupfer und s Gramm Silber ergänzt. Die Gesamtmasse ändert sich entsprechend. Die Anteile dieser neuen Legierung werden gemäß der Aufgabenstellung eingetragen. Nun können zeilenweise Gleichungen aufgestellt werden,

beispielsweise $\frac{400 + k}{1000 + k + s} = \frac{50}{100}$ bzw. $400 + k = \frac{50}{100} \cdot (1000 + k + s)$ für die erste Zeile. So erhält man dasselbe Gleichungssystem wie in der obigen Lösung.

Alternativer Lösungsweg mit Hilfe der Tabelle und des Invarianzprinzips:

Führt man das Verfahren mit der Tabelle konsequent durch, so erkennt man, dass sich die Aufgabe auch anders lösen lässt. Auch die dritte Zeile („andere Metalle“) führt zu einer Gleichung. Mit Hilfe dieser kann das Gesamtgewicht der neuen Legierung bestimmt werden. Wenn man dieses ausgerechnet hat, kann man über die gegebenen Anteile auch die Masse des Kupfers und des Silbers berechnen. So kann man das LGS umgehen und muss dafür einige einfache lineare Gleichungen und Prozentrechnungsaufgaben lösen. Bei diesem Verfahren hat man die Masse der „anderen Metalle“ als Invariante betrachtet.

Darauf kann man kommen, wenn man bewusst nach einer Invarianten sucht (Masse der „anderen Metalle“) und sich fragt, für was man diese verwenden kann (Bestimmung der neuen Gesamtmasse mit Hilfe des Anteils der „anderen Metalle“ an dieser). Bei konsequenter Anwendung des Invarianzprinzips ist es also auch losgelöst vom Hilfsmittel Tabelle möglich, auf eine Lösungsidee zu kommen. Die Tabelle kann hier dazu dienen, das lineare Gleichungssystem zu bestimmen, aber auch dazu, einen ganz anderen Lösungsweg unter Ausnutzung einer Invarianten zu entdecken.

Verwendungsvorschlag für die Aufgabe:

Diese Aufgabe ist zur Diskussion im Unterricht über verschiedene Lösungswege unter Ausnutzung verschiedener heuristischer Prinzipien und Hilfsmittel geeignet. Die Aufgabe kann als Beispielaufgabe im Unterricht vorgestellt und gemeinsam bearbeitet werden. Produktiver ist möglicherweise, die Aufgabe von den Schülerinnen und Schülern selbstständig bearbeiten zu lassen und über die Vorstellung verschiedener Lösungswege zur Diskussion über verschiedene Ansätze und heuristische Methoden zu gelangen. Das Zerlegungsprinzip kann als neues heuristisches Prinzip vorgestellt werden, das Invarianzprinzip kann mit einem neuen Anwendungsbeispiel vertieft werden.

Aufgabe 5: Lösungsmengen



Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten kann als Menge der Schnittpunkte zweier linearer Funktionen aufgefasst werden.

(a) Wie viele Lösungen kann ein solches lineares Gleichungssystem demzufolge haben? Überlege, welche unterschiedlichen Fälle zu beachten sind!

(b) Kannst du mit Hilfe deiner Überlegungen aus Aufgabenteil (a) erkennen, wie viele Lösungen es gibt, ohne das Gleichungssystem zu lösen? Wann ist das besonders leicht?

(I)

$$y = 3x + 5$$

$$y = 3x + 7$$

(II)

$$3 + 4x = y$$

$$y - 4x = 3$$

(III)

$$5y + 3x = 7$$

$$y + 15 = x$$

Lösung:

(a) Die verschiedenen möglichen Fälle lassen sich am einfachsten mit Beispielskizzen (informativen Figur) zu verschiedenen denkbaren Möglichkeiten verdeutlichen.

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

1. Die zwei linearen Funktionen (Geraden) haben genau einen Schnittpunkt, das lineare Gleichungssystem hat also genau eine Lösung.
2. Die zwei Geraden sind parallel, haben also keinen Schnittpunkt. Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems ist die leere Menge; es gibt keine Lösung.
3. Die zwei Geraden sind identisch. Jeder Punkt, der auf der Gerade liegt, ist Schnittpunkt und somit Lösung des Gleichungssystems. Es gibt also unendlich viele Lösungen.

Genau genommen gelten diese Überlegungen natürlich nur über den Mengen $\mathbb{Q}^2$ oder $\mathbb{R}^2$ als Grundmenge. Werden etwa nur ganzzahlige Lösungen oder nur natürliche Zahlen als Lösungen zugelassen, müssen diese Überlegungen etwas modifiziert werden.

(b) Während bei Aufgabenteil (a) eine allgemeine Betrachtung zur Lösung führt, müssen sich die Schüler nun erinnern, woran man an linearen Funktionsgleichungen erkennen kann, ob die zugehörigen Graphen parallel verlaufen oder nicht. Die Antwort ist am einfachsten zu finden, wenn beide Gleichungen identisch sind. Dann sind auch die entsprechenden Funktionen identisch – dies gilt auch wenn man die beiden Gleichungen durch Äquivalenzumformungen ineinander umformen kann.

Zwei Geraden sind parallel, wenn die Funktionsgleichungen in der Darstellung $y = mx + b$ die gleiche Steigung m , aber unterschiedliche Achsenabschnitte b haben. Sind die Steigungen unterschiedlich, so gibt es unabhängig von b immer genau einen Schnittpunkt.

Die Aufgabe ist also besonders leicht zu lösen, wenn die Gleichungen des linearen Gleichungssystems in der Form $y = mx + b$ gegeben sind.

(I) keine Lösung, da parallele Geraden.

(II) unendlich viele Lösungen, da identische Geraden.

(III) genau eine Lösung, da weder parallele noch identische Geraden.

Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:

Diese Aufgabe soll zum Verständnis beitragen, warum lineare Gleichungssysteme mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen haben können. Die Schüler sollen zum selbstständigen Nachdenken angeregt werden und dabei ihre Kenntnisse aus Klasse 8 („Lineare Funktionen“) auffrischen. Die Aufgabe sollte den Schülern zur selbstständigen Bearbeitung gestellt werden, insbesondere nachdem das graphische Lösungsverfahren erarbeitet wurde. Das heuristische Prinzip der Fallunterscheidung kann anhand dieser Aufgabe vorgestellt werden.