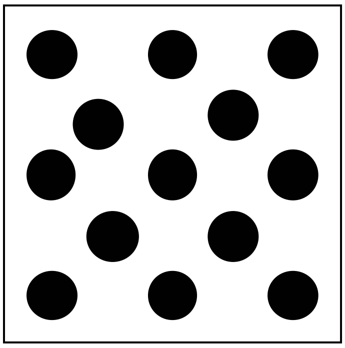
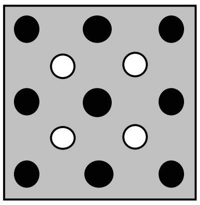
<u>Aufgabe 1:</u> Das Stanzblech: „Löcher“

In ein quadratisches Blech werden Löcher gestanzt. Insgesamt sind es 85 Löcher. Wie viele Löcher sind in der untersten Reihe?



Lösung:

Bei dieser Aufgabe kann rückwärts gearbeitet werden, dass heißt, man geht davon aus, dass die Anzahl der Löcher in der untersten Reihe bekannt ist und versucht daraus auf die Gesamtzahl der Löcher zu schließen. Dazu ist eine geschickte Zerlegung in zwei überlagerte quadratische Anordnungen sehr nützlich, wie es die folgende Figur verdeutlicht:



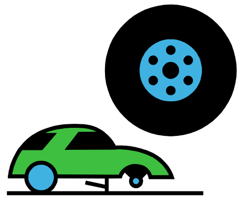
Sind in der untersten Reihe n Löcher, so gibt es insgesamt $n \bullet n = n^2$ schwarz markierte Löcher. In der Reihe direkt darüber befinden sich n-1 weiß markierte Löcher, insgesamt sind es also $(n-1)^2$ weiß markierte Löcher. Die Gesamtzahl m der Löcher in Abhängigkeit von der Anzahl n der Löcher in der untersten Reihe ergibt sich also zu: $m = n^2 + (n - 1)^2 = 2n^2 - 2n + 1$

Dabei sind für n nur positive ganze Zahlen zugelassen. Für m können nun die gegebenen Werte eingesetzt werden. Die Lösung der Aufgabe ist damit auf die Lösung einer quadratischen Gleichung zurückgeführt worden. Dabei ist zu beachten, dass nur die positiven Lösungen der Gleichung Lösungen der Aufgabe sind. Damit ergibt sich für m = 85 die Lösung n = 7.

<u>Verwendungszweck für diese Aufgabe:</u>

Wenn zuvor bereits die Strategie „Rückwärtsarbeiten“ eingeführt wurde, kann diese Aufgabe als Übungsaufgabe verwendet werden, um diese Strategie bewusst anzuwenden. Gleichzeitig ist die Aufgabe ein Beispiel für die Anwendung des Zerlegungsprinzips.

<u>Aufgabe 2:</u> Räder



Um eine Strecke von 1800 m zurückzulegen, muss das Vorderrad eines Fahrzeuges, dessen Umfang 1 m kleiner ist als der des Hinterrades, 150 Umdrehungen mehr machen als dieses. Wie oft dreht sich jedes der beiden Räder auf dieser Strecke?

Lösung:

Die Strecke von 1800 m ist als Invariante erkennbar, die von jedem Rad gleichermaßen zurückgelegt werden muss. Die Strecke ist für beide Räder gleich der jeweiligen Umdrehungszahl mal dem Umfang des Rades. Zerlegt man die Aufgabe in zwei Teile indem man das kleine und das große Rad getrennt betrachtet, und wählt man die Variablen geschickt, so erhält man ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten, das sich zu einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten umformen lässt:

x: Anzahl der Drehungen des kleinen Rades

y: Umfang des kleinen Rades

Beim Aufstellen der Gleichungen kann eine Tabelle verwendet werden:

	Umdrehungen	Umfang in m	Strecke in m
Kleines Rad	x	y	1800
Großes Rad	x - 150	y + 1	1800

Mit der Beziehung „Umdrehungen mal Umfang gleich Strecke“ ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$x \cdot y = 1800$ (Weg, den das kleine Rad zurücklegt)

$(x - 150) \cdot (y + 1) = 1800$ (Weg, den das große Rad zurücklegt)

Mit dem Einsetzungsverfahren (z.B. mit $x = \frac{1800}{y}$) erhält man die Bruchgleichung:

$$(x - 150) \cdot [(1800/x + 1] = 1800,$$

die sich zu einer quadratischen Gleichung umformen lässt:

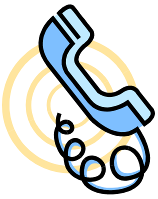
$$(x - 150) \cdot [(1800 + x) / x] = 1800$$
$$(x - 150) \cdot (1800 + x) = 1800x$$
$$1800x + x^2 - 270000 - 150x = 1800x$$
$$x^2 - 150x - 270000 = 0$$

Die pq-Formel liefert als einzige positive Lösung x = 600. Das kleine Rad muss also 600 Umdrehungen und das große 450 Umdrehungen machen.

Zur Lösung der Aufgabe ist es auch möglich, nur eine Variable einzuführen, etwa x für die Anzahl der Umdrehung des kleinen Rades: Der Umfang dieses Rades in Metern ist dann 1800/x, der des großen Rades ist wegen den zwei in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen $\frac{1800}{x} + 1$ bzw. $\frac{1800}{x - 150}$.

Somit erhält man die Gleichung $\frac{1800}{x} + 1 = \frac{1800}{x - 150}$, die als einzige positive Lösung x = 600 liefert.

Wählt man die Variable x für den Umfang des großen Rades, so erhält man bei Verwendung aller Bedingungen die Gleichung $\frac{1800}{x - 1} = \frac{1800}{x} + 150$. Als positive Lösung ergibt sich x = 4 und damit für die Umdrehungen des großen Rades 1800/4= 450.



<u>Aufgabe 3:</u> Telefonanschlüsse

Wie viele Telefonanschlüsse sind in einer Ortschaft vorhanden, wenn 499.500 gegen-seitige Gesprächsverbindungen möglich sind?

Lösung:

Die Aufgabe ist geeignet, um die Strategie des Rückwärtsarbeitens zu thematisieren. Dabei kann man von der Fragestellung ausgehen: „Angenommen, wir kennen die Anzahl der Telefonanschlüsse. Wie kommen wir dann auf die Anzahl möglicher Verbindungen?" Eine weitere Hilfe bei der Lösung dieser Aufgabe kann das Invarianzprinzip sein. Eine Invariante ist die Zahl der möglichen Verbindungen von einem einzelnen Telefon aus. Diese ist für alle Telefone identisch, nämlich n-1, wenn n die Anzahl der insgesamt vorhandenen Anschlüsse ist. Insgesamt sind mit allen Telefonen also n•(n-1) Verbindungen möglich, wobei dann aber jede Verbindung doppelt („in beide Richtungen") gezählt wurde.

Die Zahl n ergibt sich also über ½ n (n – 1) = 499.500 zu n = 1.000.

Auch das Hilfsmittel der informativen Figur lässt sich hier verwenden. Sucht man den Zusammenhang zwischen Anschlüssen und möglichen Verbindungen, kann die Situation für eine beliebig gewählte Anzahl von Anschlüssen aufgezeichnet werden, indem man die Anschlüsse als Punkte (Knoten) und die möglichen Telefonverbindungen als Verbindungen der Punkte (Kanten) zeichnet. Dies hilft beim Aufstellen (und Überprüfen) der Gleichung.

Einer anderen Vorgehensweise beim Aufstellen der Gleichung liegt folgende Überlegung zugrunde: Das erste Telefon hat n – 1 Verbindungen, das zweite n – 2 (weil die Verbindung zum ersten Telefon schon gezählt ist), das dritte hat n – 3 und das letzte hat n – n = 0 Verbindungen, die noch nicht gezählt wurden. Insgesamt hat man also (n – 1) + (n – 2) + ... + 1 Verbindungen.

Mit dieser Formel kann im Gegensatz zu der obigen nicht direkt weitergerechnet werden. Benötigt wird die Kenntnis der Summenformel von Gauss 1 + 2 + … + n = ½ n (n + 1).

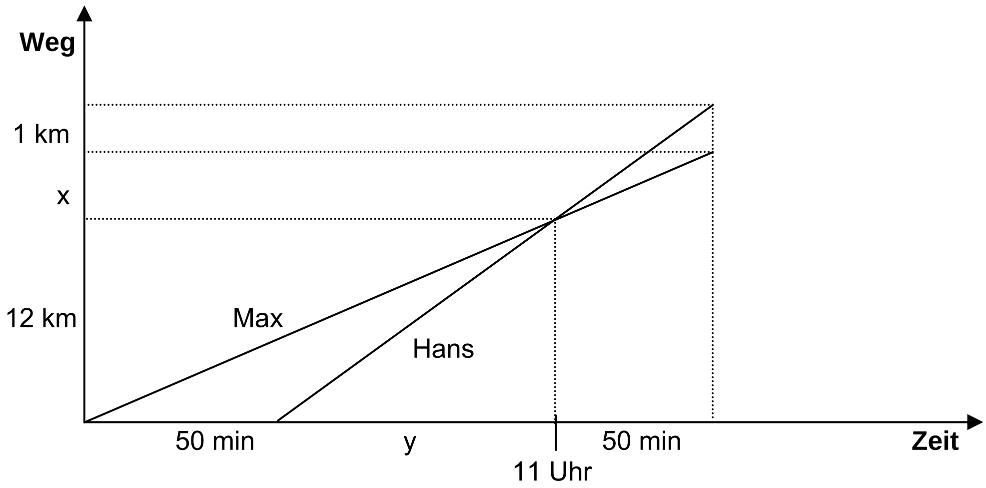
Übertragen auf die vorliegende Summe erhält man damit als Ergebnis [(n – 1) + 1] * ½ (n – 1). Dies entspricht gerade der obigen Lösung und liefert ebenfalls ½ n (n-1) = 499.500 also n = 1.000.

<u>Aufgabe 4:</u> Wettlauf

Max wandert morgens von einer Jugendherberge los. Sein Freund Hans verlässt die Jugendherberge 50 Minuten später und holt Max nach 12 km um 11.00 Uhr ein. 50 Minuten nach dem Einholen ist Hans seinem Freund Max bereits 1 km voraus. Wie viele km legen beide in der Stunde zurück und wann marschierten sie von der Jugendherberge los?

Lösung:

Um sich einen Überblick zu verschaffen, eignet sich das Anfertigen einer informativen Figur in Form eines Weg-Zeit-Diagramms:



Auf der horizontalen Achse ist die Zeit, auf der vertikalen Achse der zurückgelegte Weg aufgetragen. Zerlegt man beide Achsen in die einzelnen Weg- bzw. Zeitabschnitte, so erkennt man, dass alle bis auf zwei mit x [min] und y [km] bezeichneten Abschnitte bekannt sind.

Leider ist zu keinem Abschnitt gleichzeitig die Zeit und der Weg bekannt, weshalb die Geschwindigkeiten nicht direkt bestimmt werden können. Die Geschwindigkeiten der beiden Jungen sind jedoch Invarianten, die zwar unterschiedlich sind, sich aber über die Zeit beziehungsweise den Weg nicht ändern. Für verschiedene Weg- bzw. Zeitabschnitte können die Gleichungen für die Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von x und y aufgestellt und dann gleichgesetzt werden, erst für die Geschwindigkeit des einen, dann für die des anderen Jungen:

$v_{Max} = 12 / (50 + y) = x / 50$

$v_{Hans} = 12 / y = (x + 1) / 50$

Man erhält zwei Bruchgleichungen mit zwei Unbekannten, die sich schrittweise erst zu einer Bruchgleichung mit einer Unbekannten und dann zu einer quadratischen Gleichung vereinfachen lassen. Geht man geschickt vor, eliminiert man x, da diese Größe im Gegensatz zu y nicht interessiert, und spart sich so überflüssige Arbeit:

$v_{Max} = 12 / (50 + y) = x / 50$ auf bei beiden Seiten 1/50 addieren: $1/50 + [12 / (50 + y)] = \boxed{(x + 1) / 50}$

$v_{Hans} = 12 / y = \boxed{(x + 1) / 50}$

Gleichsetzen der rot eingerahmten Terme liefert: $1/50 + [12 / (50 + y)] = 12 / y$

Daraus folgt über einige Umformungen: $y^2 + 50y - 30000 = 0$

Als einzig positive Lösung – z.B. mittels pq-Formel – ergibt sich y = 150 (min).

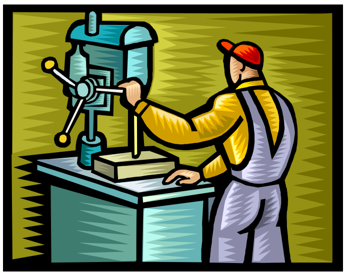
Hat man y ausgerechnet, kann man sowohl die Zeiten, zu denen die Jungen losgegangen sind, als auch ihre Geschwindigkeiten berechnen. Als Lösung ergibt sich, dass Max um 7.40 Uhr losgegangen ist und 3,6 km in der Stunde zurücklegt, während Hans um 8.30 Uhr losgegangen ist und 4,8 km in der Stunde zurücklegt.

Auch die Strategie „Rückwärtsarbeiten“ kann hier angewendet werden. Dabei sucht man eine geeignete Hilfsgröße (hier y), die zur Bestimmung der gesuchten Größen hinreichend ist, und versucht diese aus den gegebenen Daten zu berechnen (hier mit Hilfe eines Gleichungssystems).

<u>Alternative Lösung:</u>
Hält man sich an das Invarianzprinzip, so kann man die Geschwindigkeitsdifferenz als Invariante erkennen. Sie lässt sich aus der Angabe „50 Minuten nach dem Einholen ist Hans seinem Freund Max bereits 1 km voraus“ direkt bestimmen: $\Delta v = v_H - v_M$ = 1km / 50min = 1km / $\frac{5}{6}$ h = 1,2 km/h. (v_H bzw. v_M: Geschwindigkeit von Hans bzw. Max.) Mit $v_H = \frac{12}{y}$ und $v_M = \frac{12}{y+\frac{5}{6}}$ (aus dem Weg-Zeit-Diagramm) folgt $\frac{12}{y} - \frac{12}{y+\frac{5}{6}} = 1{,}2$. Damit ergibt sich y zu 2,5 Stunden = 150 min.

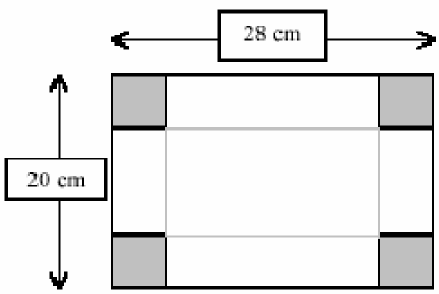
<u>Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:</u>
Obwohl ähnliche Aufgaben bereits in Klasse 7 und 8 bearbeitet werden können, ist die vorliegende Aufgabe anspruchsvoller; nicht nur weil sie auf Bruchgleichungen und quadratische Gleichungen führt, sondern auch weil der Lösungsansatz schwer zu finden ist. Die Fähigkeit, Bewegungen in einem Weg-Zeit-Diagramm darzustellen, ist sehr wichtig für die Bearbeitung dieser Aufgabe und sollte bereits vorher thematisiert worden sein.

<u>Aufgabe 5:</u> Die optimale Kiste



Anna soll im Werkunterricht eine Metallkiste ohne Deckel herstellen. Dazu bekommt sie von ihrem Lehrer ein Metallblech von 28 cm Länge und 20 cm Breite. An jeder Ecke des Bleches soll sie ein Quadrat ausschneiden, und dann die Seiten nach oben biegen. Die Kanten werden zum Schluss verschweisst. Herr Nagel, der Werklehrer, gibt jedem Schüler Extra-Punkte, wenn seine oder ihre Kiste das größtmögliche Volumen hat.
Wie groß ist die Seitenlänge der Quadrate, die an jeder Ecke ausgeschnitten werden müssen, um die Kiste mit dem größtmöglichen Volumen herzustellen?

Lösung:
Zunächst empfiehlt sich das Anfertigen einer informativen Figur:



Gerade in niedrigeren Klassenstufen kann neben der informativen Figur auch ein Modell (aus Papier oder Pappe) hergestellt werden.

Lösung durch systematisches Probieren:
Die informative Figur zeigt, dass die Höhe h der Kiste gleich der Länge des Einschnitts ist.
Die Länge L der Kiste ist: $L = 28\text{cm} - 2 \cdot h$ und die Breite $b = 20\text{ cm} - 2 \cdot h$.
Mit Hilfe einer Tabelle werden jetzt mögliche Längen für die Einschnitte ausprobiert. Das zugehörige Kistenvolumen wird berechnet und verglichen. Der größtmögliche Einschnitt ist 10cm:

Einschnitt (Höhe) in cm	Länge $L = 28\text{cm} - 2h$ in cm	Breite b $b = 20\text{ cm} - 2h$ in cm	Volumen $V = h \cdot L \cdot b$
10	8	0	0
9	10	2	180
8	12	4	384
7	14	6	588
6	16	8	768
5	18	10	900
4	**20**	**12**	**960**
3	22	14	924
2	24	16	768

Bei einem Einschnitt von 4 cm wird das Volumen der Kiste am größten. Dies ist allerdings nur ein ungefährer Wert.

Lösung mit Hilfe von Funktionen:
Aus der informativen Figur lässt sich entnehmen, dass die Höhe h der Kiste gerade der Länge des Einschnittes entspricht. Es empfiehlt sich, alle Längen in cm anzugeben und in der Rechnung auf die Einheiten zu verzichten. Für die Länge L und die Breite b gilt:

$L = 28 - 2h$

$b = 20 - 2h$

Für das Volumen gilt also: $V = h \cdot (28 - 2h) \cdot (20 - 2h) = 4h^3 - 96h^2 + 560h$

Da es sich um keine quadratische, sondern eine kubische Funktion handelt, kann die Aufgabe in Klasse 9 nicht analytisch, sondern nur numerisch gelöst werden. Dies sollte mit Hilfe des Computers oder GTR geschehen. Eine graphische Darstellung der Funktion zeigt, dass das Maximum ungefähr bei $h = 4$ liegt. Einen genaueren Wert erhält man z.B. in dem man sich den Ausschnitt um das Maximum vom Rechner vergrößert darstellen lässt.
Auch die Auswertung mit einer Tabellenkalkulation ist möglich und nicht zu schwer. Dieses Vorgehen ist vergleichbar der „Lösung durch systematisches Probieren“, mit dem Rechner können dabei jedoch höhere Genauigkeiten erreicht werden. Viele Programme und GTR sind auch direkt in der Lage, einen Näherungswert für das Maximum auszugeben.
Ein Näherungswert für die Lösung dieser Aufgabe ist $h \approx 3{,}837$.