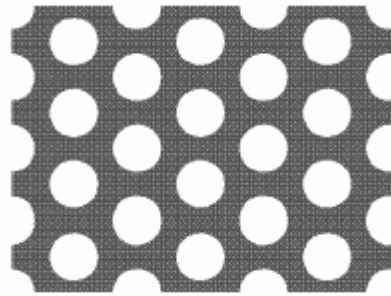


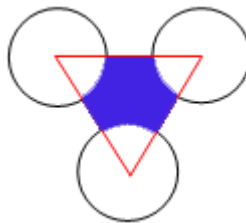
Aufgabe 1: Das Stanzblech: „Gewicht“

Aus einem Blech werden kreisförmige Löcher im abgebildeten „hexagonalen“ Muster ausgestanzt (d.h. die Mittelpunkte benachbarter Kreise bilden gleichseitige Dreiecke). Der Abstand der Mittelpunkte benachbarter Löcher beträgt $a = 12 \text{ mm}$, der Durchmesser eines Kreises $d = 9 \text{ mm}$. Um wieviel Prozent wird die Metallplatte dadurch leichter? Gehe davon aus, dass das Blech so groß ist, dass es egal ist, wie der Rand abgeschnitten wird.



Lösung:

Verwendet man das Zerlegungsprinzip, bietet es sich an, das Blech in die von den Kreismittelpunkten gebildeten gleichseitigen Dreiecke zu zerlegen, die in der Aufgabenstellung erwähnt werden. Man erhält - abgesehen vom Rand, der jedoch keine Rolle spielt - lauter kongruente Dreiecke, aus denen das Blech zusammengesetzt ist. Nach dem Ausstanzen der Löcher bleibt von jedem dieser Dreiecke die in der folgenden Abbildung dunkelblau gefärbte Fläche übrig:



Da es sich um gleichseitige Dreiecke handelt, kann deren Fläche berechnet werden, ebenso die der Kreissektoren. Der Anteil, der durch das Ausstanzen an Gewicht verloren geht, kann über den Quotienten aus der Fläche der drei Kreissegmente (die zusammen einen Halbkreis ergeben) und der Dreiecksfläche bestimmt werden. Mit den Zahlenwerten aus der Aufgabenstellung folgt:

$$3A_{\text{Kreissegment}} / A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{Halbkreis}} / A_{\text{Dreieck}} = (\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 4,5^2) / (12 \cdot 6) \approx 31,8 / 72 = 0,44$$

Dies entspricht einer Gewichtsersparnis von ungefähr 56%.

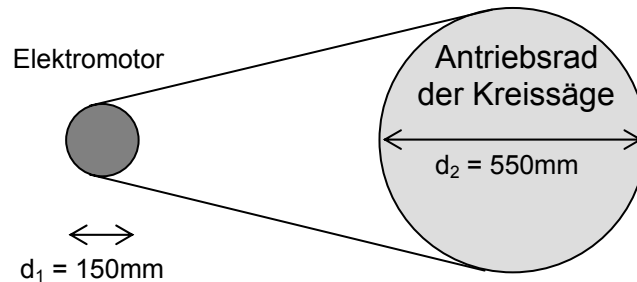
Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:

Diese Aufgabe ist ein Beispiel für die Anwendung des Zerlegungsprinzips. Wenn die Schülerinnen und Schüler an dieses Prinzip bereits gewöhnt sind, ist der Einsatz als Übungsaufgabe sinnvoll. Nachdem die Lernenden die Aufgabe selbstständig bearbeitet haben, sollte eine Besprechung der Lösungswege unter besonderer Berücksichtigung der verwendeten heuristischen Methoden stattfinden. Wenn ein Schüler die Aufgabe mit dem Zerlegungsprinzip gelöst hat, sollte er die Gelegenheit haben, seinen Lösungsweg vorzustellen. Die Aufgabe kann auch gestellt werden, wenn Kreissektoren im Unterricht noch nicht behandelt wurden, da sich die drei auftauchenden Sektoren zu einem Halbkreis ergänzen.

Aufgabe 2: Kreissäge



Drehbewegungen werden in technischen Anwendungen häufig durch Riemen oder Ketten von einer Welle auf eine andere übertragen. In einem Sägewerk wird eine Kreissäge mit einem Elektromotor betrieben. Auf welche Umdrehungszahl (Umdrehungen pro Minute) muss der Motor eingestellt werden, wenn sich die Säge sechsmal in der Sekunde drehen soll?



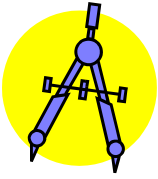
Lösung:

Wenn der Zusammenhang $\frac{f_1}{f_2} = \frac{U_2}{U_1}$ zwischen der Drehzahl beziehungsweise Frequenz f und dem Umfang U bekannt ist, dann ist die Aufgabe eine Routineaufgabe. Ansonsten kann mit Hilfe des Invarianzprinzips argumentiert werden: Wenn sich das Rad des Elektromotors einmal ganz herumdreht, bewegt sich der Riemen oder die Kette genau um den Umfang dieses Rades weiter. Genau um dieses Stück muss also auch das andere Rad in derselben Zeit abrollen. In einer Sekunde soll sich das große Rad nun sechsmal drehen. Der Riemen muss sich also in einer Sekunde um $6 \cdot \pi \cdot d_2$ „weiterbewegen“. Wie oft muss sich das kleine Motorrad drehen, um diese Strecke auf dem Riemen abzurollen? Bei einer Umdrehung wird die Strecke $\pi \cdot d_1$ abgerollt, für die ganze Strecke werden also $\frac{6 \cdot \pi \cdot d_2}{\pi \cdot d_1}$ Umdrehungen benötigt. Einsetzen der Werte liefert die Umdrehungen pro Sekunde, das Ergebnis muss für die gefragten Umdrehungen pro Minute nur noch mit 60 multipliziert werden. Als Lösung ergibt sich, dass der Elektromotor auf 1320 Umdrehungen pro Minute eingestellt werden muss.

Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:

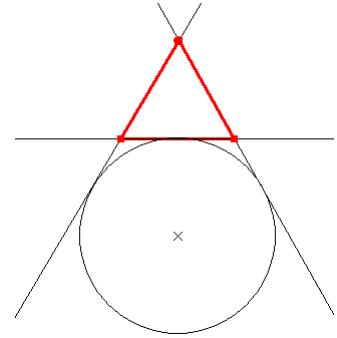
Die Aufgabe kann als Übungsaufgabe verwendet werden. Bei der Besprechung sollte explizit auf das Invarianzprinzip eingegangen werden. Auch die Parallele zu anderen Aufgaben, in denen das Invarianzprinzip verwendet wurde, sollte aufgezeigt werden, denn es kann in der Tat in vielen Bewegungsaufgaben eingesetzt werden.

Aufgabe 3: Ankreis



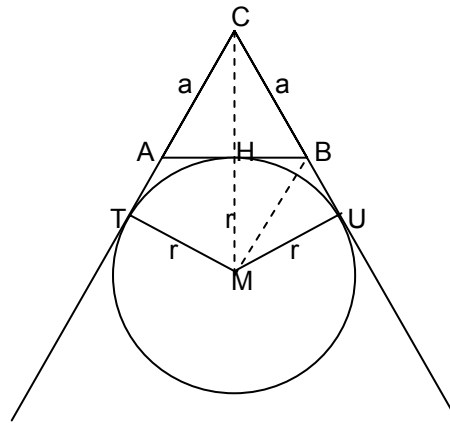
Unter einem Ankreis versteht man einen Kreis, der eine Dreiecksseite und die Verlängerung der beiden anderen Dreiecksseiten berührt. Jedes Dreieck hat drei Ankreise.

Berechne den Flächeninhalt eines der drei (untereinander kongruenten) Ankreise eines gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge a !



Lösung:

Zur Lösung empfiehlt sich das Anfertigen einer informativen Figur:



Aus der Aufgabenstellung folgt, dass bei den Berührungspunkten H, T und U rechte Winkel zwischen den Radien und den (verlängerten) Dreiecksseiten liegen müssen, da Tangenten mit dem zugehörigen Radius (Verbindung Berührungspunkt-Mittelpunkt) rechte Winkel einschließen.

Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABC, kann mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden:

$$a^2 = \frac{1}{4} a^2 + h^2 \quad \text{liefert} \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

Da man für die Berechnung des Flächeninhalts des Ankreises dessen Radius braucht, muss dieser ebenfalls mit Hilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt werden. Es gilt

$$r^2 + (BU + a)^2 = (h + r)^2 \quad (1)$$

Unbekannt ist noch die Länge der Strecke BU, um diese zu bestimmen, ist das Einzeichnen einer Hilfslinie von Nutzen: der Strecke MB. Dadurch wird das Viereck MUBH in zwei rechtwinklige Dreiecke mit der gleichen Hypotenuse MB und einer gleichlangen Kathete $MU = MH = r$ zerlegt. Nach den Kongruenzsätzen für Dreiecke gilt dann:

$$\text{Länge der Strecke BU} = \text{Länge der Strecke BH} = \frac{a}{2}.$$

Eingesetzt in Gleichung (1) folgt $r = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ (dies entspricht gerade der Dreieckshöhe!) und damit für die

$$\text{gesuchte Kreisfläche } A = \frac{3}{4} \pi a^2.$$

Aufgabe 4: Baumalter

Wie alt ist der dargestellte Baum? Man hat ermittelt, dass der Umfang eines Baumes pro Lebensjahr um durchschnittlich 2,5 cm wächst.



Lösung:

Da in der Aufgabenstellung keine Maße angegeben sind, ist der Lernende darauf angewiesen, diese aus dem Foto zu entnehmen und in die Wirklichkeit zu übertragen. Der einzige Bezugspunkt hierfür ist der Mann oder die Frau neben dem Baum. Betrachten wir beispielsweise den Mann: Er ist auf dem Bild ungefähr 2 cm groß, der Baumstamm ist auf dem Bild ungefähr 9 cm breit. Angenommen, der Mann ist in Wirklichkeit 1,90 m groß, dann folgt daraus, dass 2 cm auf dem Bild in der Realität 1,90 m entsprechen.

Dann ist der Baumstamm in der Realität ca. $[(9 \text{ cm} \cdot 1,9 \text{ m}) / 2 \text{ cm}] = 8,55 \text{ m}$ breit.

Der Umfang des Baumes ist dann ca. $\pi \cdot d = \pi \cdot 8,55 \text{ m} = 26,86 \text{ m}$

Da der Umfang eines Baumstammes durchschnittlich um 2,5 cm pro Jahr wächst, folgt daraus, dass der Baum etwa 1.000 Jahre alt ist, denn $U_{\text{Baum}} = 26,86 \text{ m} = 2686 \text{ cm} = \text{Anzahl der Jahre} \cdot 2,5 \text{ cm}$.

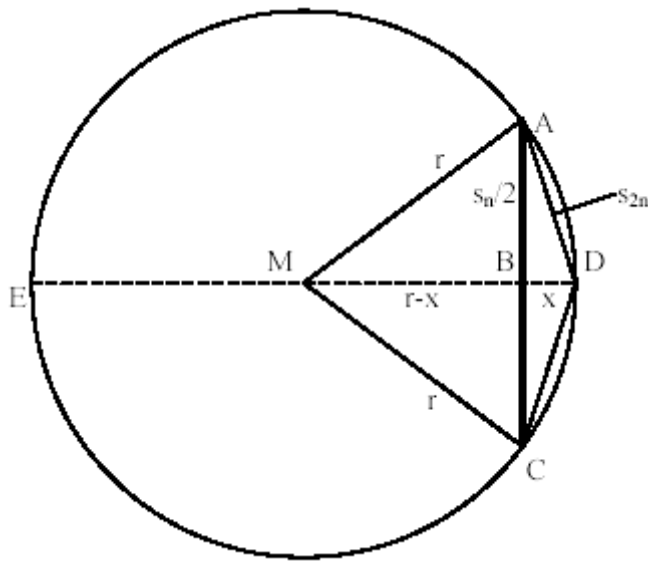


Aufgabe 5: Rekursionsformel für n-Ecke

Sei s_n die Seitenlänge des regelmäßigen n-Ecks mit dem Umkreis mit Radius r .
Bestimme die Seitenlänge des regelmäßigen $2n$ -Ecks mit demselben Umkreis!

Lösung:

Der Umkreis ist eine Invariante in dieser Aufgabe: n -Eck und $2n$ -Eck haben denselben Umkreis.
Deshalb lassen sich beide in eine informative Figur einzeichnen:



Die Anwendung des Satz des Pythagoras auf das Dreieck ABD liefert einen Zusammenhang zwischen s_n und s_{2n} , in dem allerdings noch die unbekannte Länge der Strecke BD auftaucht (mit x bezeichnet):

$$(s_n / 2)^2 + x^2 = (s_{2n})^2 \quad (1)$$

Die Unbekannte x kann über das Dreieck AMB mit dem Satz des Pythagoras aus den Größen r und s_n berechnet werden:

$$(s_n / 2)^2 + (r - x)^2 = r^2 \quad (2)$$

Gleichsetzen von (1) und (2) mittels Eliminierung von x und anschließende Umformung, um den erhaltenen Ausdruck zu vereinfachen, liefert letztlich die gesuchte Rekursionsformel:

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - 2r \cdot \sqrt{r^2 - (s_n / 2)^2}}$$

$$s_{2n} = \sqrt{2r^2 - r \cdot \sqrt{4r^2 - s_n^2}}$$

Alternativer Lösungsansatz: Einzeichnen der Sehne AE (vergleiche Skizze) liefert mit dem Satz des Thales das bei A rechtwinklige Dreieck AED. Wendet man auf dieses Dreieck den Kathetensatz und auf das Dreieck AMB den Satz des Pythagoras an, erhält man das gleiche Ergebnis mit etwas weniger Rechenaufwand.