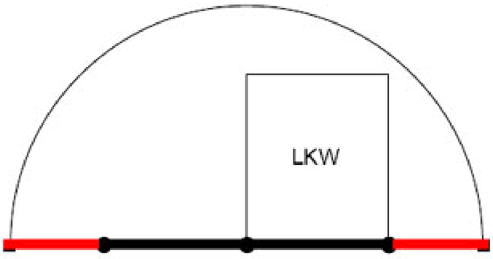
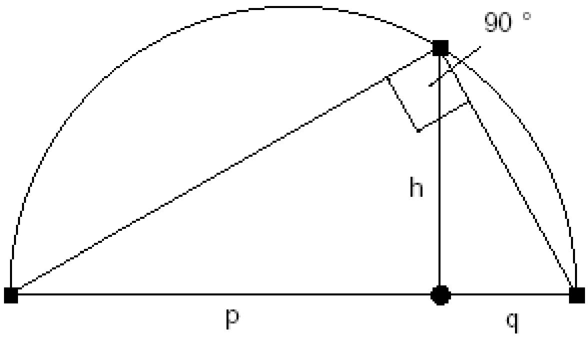
Aufgabe 1: **LKW**

Ein LKW soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren. Die zweispurige Fahrbahn ist insgesamt 6 m breit; auf beiden Seiten befindet sich ein Randstreifen von je 2 m Breite. Wie hoch darf der LKW maximal sein, wenn der Sicherheitsabstand zur Decke mindestens 30 cm betragen muss?



Lösung:

Da der Tunnel die Form eines Halbkreises hat, kann auf den Satz des Thales zurückgegriffen werden. Die in der unteren Skizze eingezeichnete Höhe h entspricht der Höhe der Tunnelwand an der Außenseite des LKW:

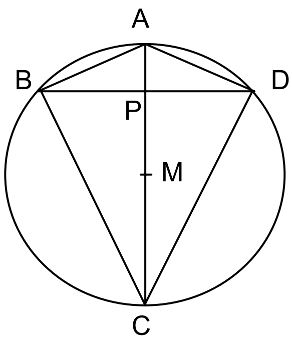


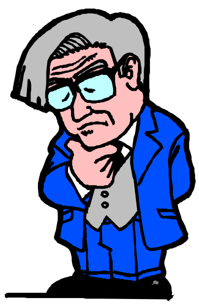
Die Länge der Strecke p beträgt 2 m + 6 m = 8 m; q ist 2 m lang. Es gilt der Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

Damit ist $h^2 = p \cdot q = 8 \cdot 2 = 16$. also ist h = 4 m. Da der minimale Sicherheitsabstand des LKW zur Decke 30 cm beträgt, darf der LKW maximal 3,70 m hoch sein.

Aufgabe 2: **Drachenviereck**

Dem Kreis k(M;r) ist ein Drachenviereck ABCD einbeschrieben. Die Diagonale BD hat die Länge 1,5 r. Bestimme die Länge der Strecke MP.





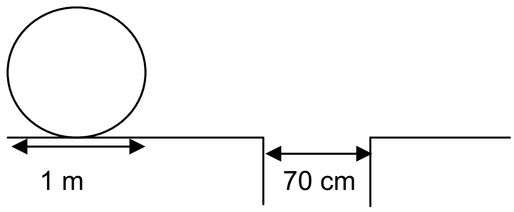
Lösung:

Bei vielen geometrischen Aufgaben ist eine informative Figur von großer Hilfe. Auch das Zerlegungsprinzip kann oft verwendet werden. In Bezug auf die informative Figur ist es bei dieser Aufgabe wichtig, geeignete Hilfslinien einzuzeichnen, hier die Radien von M nach B bzw. D. Aufgrund der Symmetrie kann das entstandene Dreieck MBD in zwei kongruente rechtwinklige Teildreiecke MPB und MDP zerlegt werden, von denen zwei Seitenlängen bekannt sind (der Radius ist als bekannt vorauszusetzen). Mit dem Satz des Pythagoras folgt für beide Dreiecke:

$r^2 = (0{,}75r)^2 + (MP)^2$. Daraus ergibt sich die gesuchte Länge zu $\frac{r}{4}\cdot\sqrt{7}$.

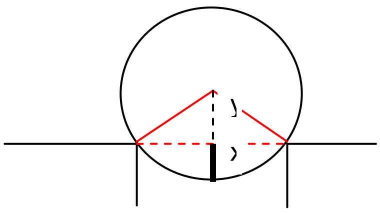
<u>Aufgabe 3:</u> Schlagloch

Ein Rad vom Durchmesser 1m rollt auf ein 70 cm breites Loch zu. Wie tief wird das Rad einsacken?



Lösung:

Diese Aufgabe muss zuerst in eine mathematische Fragestellung überführt werden. Entscheidend für das Gelingen ist dabei eine gute Skizze, etwa in der folgenden Art:



Dabei sind die rot gezeichneten Stücke gegeben (Radius des Rades und Breite des Loches) und das fett gezeichnete Stück gesucht. Die gesuchte Größe (x) entspricht dem Radius abzüglich des schwarz gestrichelten Stückes (y). Es ist also der Abstand einer 70 cm langen Sehne vom Mittelpunkt in einem Kreis mit dem Durchmesser 1 m zu bestimmen: die Aufgabe ist somit analog zur Aufgabe „Drachenviereck" und kann mit dem gleichen Lösungsverfahren (über den Satz des Pythagoras) gelöst werden.

Es ergibt sich $y = \sqrt{50^2 - 35^2} = 36$ cm und somit die gesuchte Größe zu x = 50 cm – 36 cm = 14 cm. Das Rad sackt also etwa 14 cm tief ein.

<u>Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:</u>

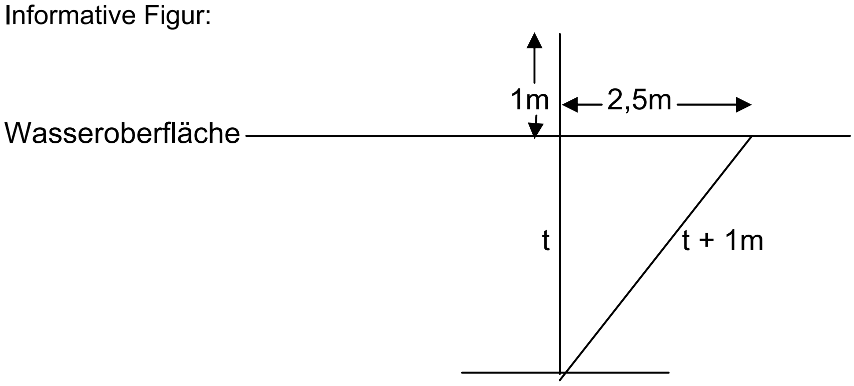
Die Aufgabe kann den Schülerinnen und Schülern als Übungs- oder Hausaufgabe gestellt werden, nachdem die Aufgabe „Drachenviereck" behandelt wurde. Die Analogie zwischen den beiden Aufgaben ist nicht offensichtlich. Entscheidend ist daher das Anfertigen einer passenden informativen Figur und deren richtiger Interpretation, um die Aufgabe über das Analogieprinzip lösen zu können.

<u>Aufgabe 4:</u> Wasserpflanze

Um die Tiefe eines Teiches zu bestimmen wird folgendes Verfahren angewandt: Eine Wasserpflanze, die einen Meter senkrecht aus dem Teich ragt, wird zur Seite gezogen bis sie mit ihrem oberen Ende genau an die Wasseroberfläche reicht. Man misst, dass sie dazu 2,5 m zur Seite gezogen werden muss. Wie tief ist der Teich ungefähr?

Lösung:

Informative Figur:



Mit dem Satz des Pythagoras und der informativen Figur ergibt sich für die Wassertiefe:

$$t^2 + (2{,}5\,\text{m})^2 = (t + 1\,\text{m})^2 \quad \Rightarrow \quad t \approx 2{,}6\ \text{m}$$

Anmerkung: Eine Schwierigkeit für Schüler kann darin liegen, dass von dem rechtwinkligen Dreieck nur eine Seite gegeben ist. Man muss einen Zusammenhang zwischen den beiden unbekannten Seiten finden. Nimmt man dabei das Invarianzprinzip zur Hilfe, kann man hier die unbekannte Länge der Pflanze als Invariante erkennen. Dann lässt sich mit dem Satz des Pythagoras die Länge der Pflanze und mit dieser die Tiefe des Teiches berechnen.

<u>Aufgabe 5:</u> Horizonte

Die Erde ist in guter Näherung eine Kugel mit dem Radius r = 6378 km.

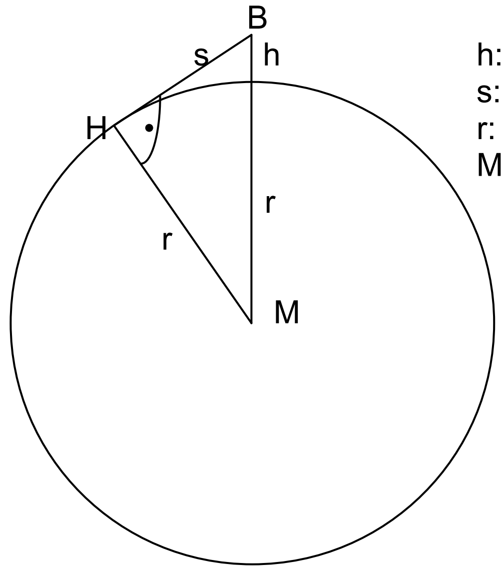
(a) Wie groß ist die Sichtweite für einen Beobachter in einem Boot auf offener See, dessen Augen sich 3 m über der Wasseroberfläche befinden?

Hinweis: Mit Sichtweite ist hier die Entfernung vom Beobachter zum Horizont gemeint.

(b) Ein Segelschiff nähert sich diesem Beobachter. Sein Mast ist 16 m hoch. Wie weit ist das Schiff vom Beobachter entfernt, wenn dieser gerade die Mastspitze am Horizont auftauchen sieht?

Lösung:

(a): Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe liegt im korrekten Erfassen der Situation und der „Übersetzung" in eine mathematische Fragestellung. Dies kann mit einer informativen Figur geschehen, in der die auftauchenden Verhältnisse (natürlich nicht maßstabsgetreu) dargestellt werden können:



h: Beobachtungshöhe 3 m
s: Sichtweite
r: Erdradius 6378 km
M: Erdmittelpunkt

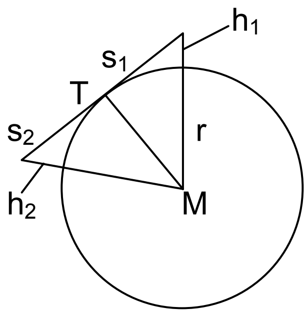
Entscheidend ist die Erkenntnis, dass es sich bei der Strecke s um einen Tangentenabschnitt handelt. Daher ist der Winkel MHB ein rechter Winkel. Somit kann die Strecke s mit dem Satz des Pythagoras bestimmt werden:

$$s^2 = (r + h)^2 - r^2$$

$$\rightarrow \qquad s = \sqrt{2rh + h^2}$$

Mit den in der Aufgabenstellung gegebenen Werten ergibt sich s = 6,2 km (gerundet auf volle 100 m).

(b): Die informative Figur ähnelt der in Teil (a):



Zuerst müssen die Lernenden die Situation richtig erfassen: Die Mastspitze erscheint dann am Horizont, wenn die Verbindungslinie „Beobachter–Mastspitze“ eine Tangente an die Erde ist. Damit erhält man ein Dreieck ohne rechten Winkel, da h_1 (Höhe des Beobachters) ungleich h_2 (Masthöhe) ist. Folgende Überlegung hilft nun weiter: Die Verbindung vom Erdmittelpunkt M zum Berührpunkt T der Tangente zerlegt das Dreieck in zwei rechtwinklige Teildreiecke.
Die Bestimmung der auftretenden Tangentenabschnitte s_1 und s_2 erfolgt analog zu Aufgabenteil (a), im ersten Fall sogar mit identischen Zahlenwerten. Es ergibt sich als Lösung $s = s_1 + s_2 = 20{,}5$ km.
Die Aufgabe kann also mit Hilfe des Zerlegungsprinzips auf Bekanntes zurückgeführt werden und dient damit auch als Beispiel für die Anwendung des Rückführungsprinzips.

Variation zur Vereinfachung der Aufgabe:

Um die Aufgabe zu vereinfachen und damit die Chance zu erhöhen, dass auch leistungsschwächere Schülerinnen und Schüler sie erfolgreich bearbeiten, kann zusätzlich zum Aufgabentext eine Visualisierung des Problems angegeben werden, die andeutet, inwiefern die Sichtweite durch die Erdkrümmung eingeschränkt wird: