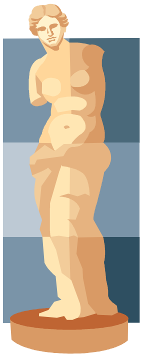
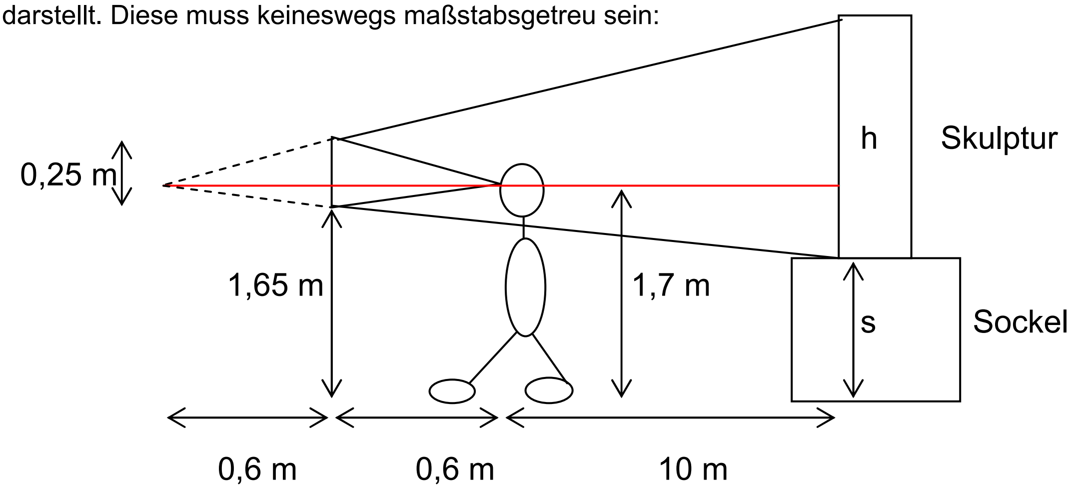


<u>Aufgabe 1:</u> Die Skulptur

Um die Höhe einer Skulptur zu bestimmen, die auf einem Sockel steht, stellt sich eine Person (Augenhöhe 1,70 m) in einer Entfernung von 10 m mit dem Rücken zur Skulptur und hält sich einen 25 cm hohen, ebenen Spiegel vertikal so vor das Gesicht, dass sie darin die Skulptur gerade formatfüllend (ohne den Sockel!) sieht. Der Abstand des Spiegels zum Gesicht des Betrachters beträgt dann 60 cm. Die Spiegelunterkante befindet sich 1,65 m über dem Boden. Wie hoch ist die Skulptur?

Lösung:

Entscheidend für die Lösung der Aufgabe ist eine gute Skizze, die den gegebenen Sachverhalt darstellt. Diese muss keineswegs maßstabsgetreu sein:



Beachtet man, dass beim Spiegel Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel gilt, so kann man die Skizze zu einer Strahlensatzfigur ergänzen (in der Zeichnung gestrichelt dargestellt.)

Mit dem zweiten Strahlensatz folgt:

$$\frac{10\,\text{m} + 0{,}6\,\text{m} + 0{,}6\,\text{m}}{0{,}6\,\text{m}} = \frac{h}{0{,}25\,\text{m}}$$

Damit gilt für die gesuchte Höhe h der Skulptur:

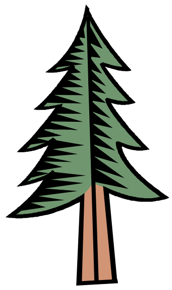
$$h = \frac{11{,}2\text{ m}}{0{,}6\text{ m}} \cdot 0{,}25\text{ m} \approx 4{,}7\text{ m}$$

<u>Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:</u>

Bei Anwendungsaufgaben zu den Strahlensätzen besteht die Schwierigkeit meist in der Konstruktion einer passenden Strahlensatzfigur. Dabei kann eine informative Figur gute Dienste leisten. Dies muss jedoch geübt werden! Dazu kann diese Aufgabe eingesetzt werden.

Die Aufgabe lässt sich statt über die Strahlensätze auch mit Hilfe ähnlicher Dreiecke lösen.

Aufgabe 2: **Baumspitze**

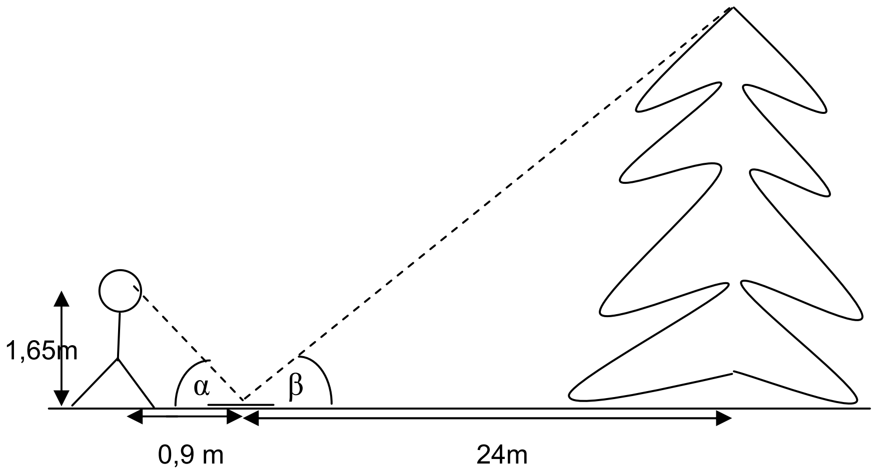


Der Schüler in der Abbildung hält seinen Kopf so, dass er die Baumspitze in dem am Boden liegenden Spiegel sehen kann.

(a) Wie hoch ist der Baum?

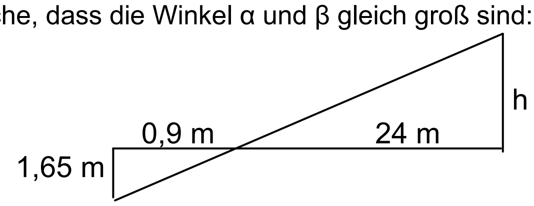
(b) Bei einem Sturm brechen die oberen 37,75 m des Baumes ab. In welcher Entfernung x vom Schüler muss jetzt der Spiegel liegen, damit er darin, bei gleichem Standort wie vorher, die neue Baumspitze sehen kann?

Bearbeitungstipp für (a) und (b): Bei der Reflexion des Lichtes am Spiegel gilt das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel α = Ausfallswinkel β.



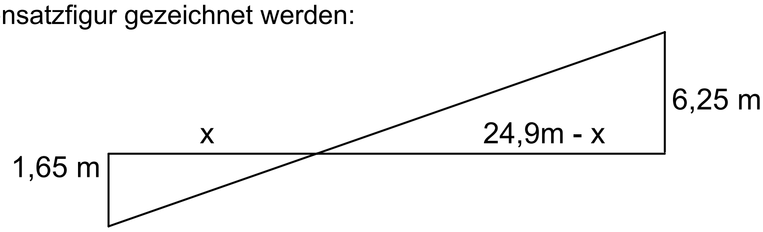
Lösung:

(a) Bei dieser Aufgabe sollte erkannt werden, dass man den linken Teil der Zeichnung an der Grundlinie spiegeln kann um eine Strahlensatzfigur zu erhalten. Dass dies möglich ist, folgt aus der Tatsache, dass die Winkel α und β gleich groß sind:



Mit dem zweiten Strahlensatz lässt sich dann die Höhe zu $h = (1{,}65\text{ m} \cdot 24\text{ m}) / 0{,}9\text{ m} = 44\text{ m}$ berechnen. Die Aufgabe lässt sich auch ohne Strahlensatz und Umstrukturieren der Figur lösen, wenn man ähnliche Dreiecke benutzt.

(b) Auch diese Aufgabe lässt sich über informative Figur lösen. Diese kann wie oben gezeigt gleich als Strahlensatzfigur gezeichnet werden:

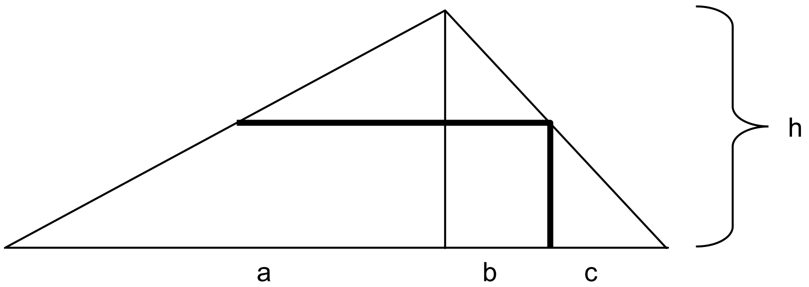


Der Baumstumpf ist nur noch 44 m – 37,75 m = 6,25 m hoch, die Augenhöhe des Schülers ist noch immer 1,65 m und sein Abstand zum Baum bleibt bei 24,9 m. Der gesuchte Abstand des Spiegels vom Schüler sei x. Damit ergibt sich mit dem zweiten Strahlensatz: 1,65 / x = 6,25 / (24,9 –x).
Auflösen nach x liefert den gesuchten Abstand: x = 5,20 m.

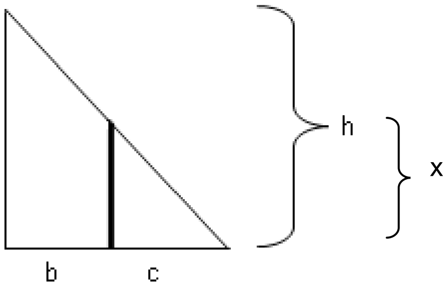
Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:
Bei dieser Aufgabe kann der Einsatz informativer Figuren bei Strahlensatzaufgaben geübt werden. Die Aufgabe kann auch im Zusammenhang mit dem Thema „Ähnlichkeit" gestellt werden, da sie auch über ähnliche Dreiecke ohne Strahlensätze elegant lösbar ist.

Aufgabe 3: Fachwerk

Für den Bau eines Hauses ist eine Fachwerkkonstruktion im Giebel geplant. Berechne die Länge der beiden fett gezeichneten Trägerbalken aus den gegebenen Größen a = 18 m, b = 5 m, c = 4 m und der Höhe des Daches h = 8,1 m.



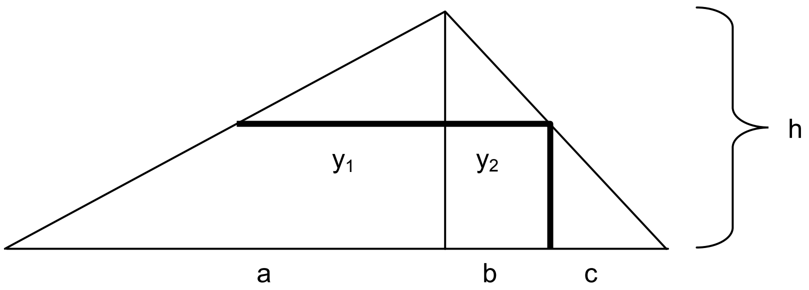
Lösung:
Gegeben: a = 18 m, b = 5 m, c = 4 m und die Höhe des Daches h = 8,1 m.
Gesucht: die Länge der beiden fett gezeichneten Trägerbalken.
Entscheidend für die Lösung dieser Aufgabe ist die geschickte Zerlegung der Ausgangsfigur in Teilfiguren. Betrachtet man nur den Teil rechts der eingezeichneten Höhe und nur den vertikalen Balken, kann dessen Länge – bezeichnet mit x– direkt über Strahlensätze bestimmt werden:



Aus x / c = h / (b + c) folgt x = (c ⋅ h) / (b + c) = 8,14 ⋅ 4 / 9 = 3,6. Der vertikale Balken ist 3,6 m lang.

Die Länge des horizontalen Balkens kann nun bestimmt werden. Dazu muss die bereits bestimmte Länge des vertikalen Balkens (x = 3,6 m) mit der Länge des unteren Abschnittes der Höhe h identifiziert werden. Die Länge des horizontalen Balkens kann dann direkt mit der großen

Strahlensatzfigur oder durch Zerlegung der Gesamtfigur in zwei Teildreiecke abschnittsweise mit Hilfe einfacherer Strahlensatzfiguren berechnet werden. Letztere Variante sei hier näher beschrieben:
Man denkt sich den horizontalen Balken zusammengesetzt aus den beiden Teilstücken y_1 und y_2 links und rechts der eingezeichneten Dachhöhe:



Mit Hilfe von Strahlensatzfiguren lassen sich dann die folgenden Gleichungen aufstellen:

$a / h = y_1 / (h – 3{,}6)$ für das linke Teilstück y_1 und

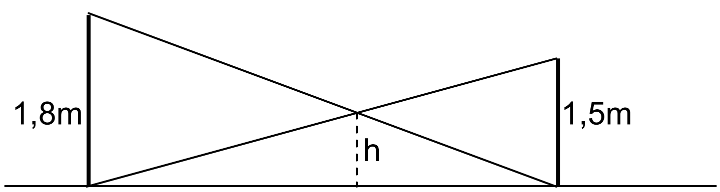
$(b + c) / h = y_2 / (h – 3{,}6)$ für das rechte Teilstück y_2.

Mit den gegebenen Zahlenwerten folgt y_1 = 10 m und y_2 = 5 m. Der horizontale Balken ist 15 m lang.

<u>Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:</u>
Die sinnvolle Zerlegung in Teildreiecke ist ein in vielen Bereichen der Geometrie nützliches Verfahren. Dies gilt für den Themenbereich „Strahlensätze“ ebenso wie für den Themenbereich „Satz des Pythagoras“. Diese wichtige Anwendung des Zerlegungsprinzips kann anhand dieser Aufgabe herausgearbeitet werden. Um dieses Ziel zu erreichen, kann die Aufgabe im Unterrichtsgespräch gemeinsam bearbeitet und besprochen werden. Es ist aber auch möglich, die Aufgabe den Schülerinnen und Schülern erst zur selbstständigen Bearbeitung zu stellen und dann beim Besprechen des Lösungsweges auf das Zerlegungsprinzip einzugehen.

<u>Aufgabe 4:</u> Das Regal

Die Seitenteile eines Regals sind 1,8 m bzw. 1,5 m hoch. Zur Stabilisierung des Regals sollen zwei Diagonalstreben eingebaut werden. In welcher Höhe h treffen sich die beiden Streben?



Lösung:
Die Aufgabe sieht auf den ersten Blick leicht aus. Allerdings ist die Lösung mit Hilfe von Strahlensätzen oder ähnlichen Dreiecken relativ kompliziert. Dafür müssen wenigstens eine Hilfslinie (Parallele zur Grundlinie durch den Schnittpunkt) und zwei weitere Variablen eingeführt werden, wodurch man mit drei Unbekannten arbeiten muss.

Eine elegantere Möglichkeit ist die Lösung mit linearen Funktionen, die vom Rechenaufwand geringer ist. Dazu stellt man Funktionsgleichungen für beide Diagonalen auf, wobei man den Ursprung des Koordinatensystems zum Beispiel in den Fußpunkt des linken Seitenteils legen kann. Zum Aufstellen der Funktionsgleichungen benötigt man den Abstand der Seitenteile voneinander. Hat man erkannt, dass h unabhängig von diesem Abstand ist, kann man ihn 1 setzen oder allgemein mit einem Parameter p bezeichnen, der sich bei der weiteren Rechnung herauskürzt.
Rechnet man mit der Länge 1, ergeben sich folgende Geradengleichungen:

$y_1 = m_1 * x + b = -1{,}8 * x + 1{,}8$ für die fallende Gerade und

$y_2 = m_2 * x + b = 1{,}5 * x$ für die steigende Ursprungsgerade.

Am Schnittpunkt ist $-1{,}8 * x + 1{,}8 = 1{,}5 * x$

Dies liefert $x \approx 0{,}55$. Die zugehörige y-Koordinate entspricht der gesuchten Höhe ($h \approx 82$ cm.)

Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:
Diese Aufgabe zeigt, dass es sinnvoll sein kann, nach alternativen Lösungsmöglichkeiten mit anderen mathematischen Mitteln zu suchen, anstatt - wie bei diesem Aufgabentyp meist üblich - mit den Strahlensätzen zu arbeiten Je mehr Lösungsansätze gefunden werden, desto größer sind die Chancen, ein Problem tatsächlich auch zu lösen. Die Aufgabe kann als Übungsaufgabe gestellt werden. Die Schülerinnen und Schüler können besonders viel dabei lernen, wenn sie dazu angeregt werden, verschiedene Lösungswege zu finden. Daran kann sich eine Diskussion darüber anschließen, welche Lösungswege gefunden wurden und welche besonders sinnvoll sind.

Aufgabe 5: Ähnlichkeit

(a) Mikroskope werden in der Chemie häufig eingesetzt, um kleine Kristalle besser betrachten zu können. Erkläre, wo hierbei Ähnlichkeit im Sinne der Mathematik auftritt!
(b) Sieh dir die unten stehende vergrößerte Abbildung genau an! Sie zeigt einen so genannten Silberbaum. Was kann man entdecken, wenn man einzelne Teile noch weiter vergrößert? Was bedeutet Ähnlichkeit in diesem Zusammenhang?

Lösung:

(a) Durch die Vergrößerung mit Hilfe des Mikroskops kann man den Kristall besser betrachten. Ein Mikroskop vergrößert alle Strecken des Originals in einem bestimmten Maßstab. Das heißt, dass die Bildfigur dem Ausgangsobjekt ähnlich im Sinne der Mathematik ist, da es sich hier um ein maßstabsähnliches Vergrößern handelt.

(b) Zoomt man (beispielsweise mit Hilfe des Mikroskops) näher an die Figur heran, kann man eine Figur entdecken, die der Ausgangsfigur ähnlich ist: Die Figur zeigt eine ähnliche Verästelung. Hierbei handelt es sich allerdings um keine Ähnlichkeit im Sinne der Mathematik, denn keine maßstabsgetreue Vergrößerung eines Teils der Figur entspricht der Ausgangsfigur. Weder die Winkel der Äste noch ihre Anzahl ist gleich. Die Ähnlichkeit besteht hier allein in der Struktur.