<u>Aufgabe 1:</u> Harry Potters Filmkritik

25 Schüler und Schülerinnen der Klasse 9 sollten die ersten beiden Harry-Potter-Filme mit ausgezeichnet (a), sehr gut (sg), gut (g), mittelprächtig (m), schlecht (s) und sehr schlecht (ss) bewerten. Dabei sind die folgenden Urteile entstanden:

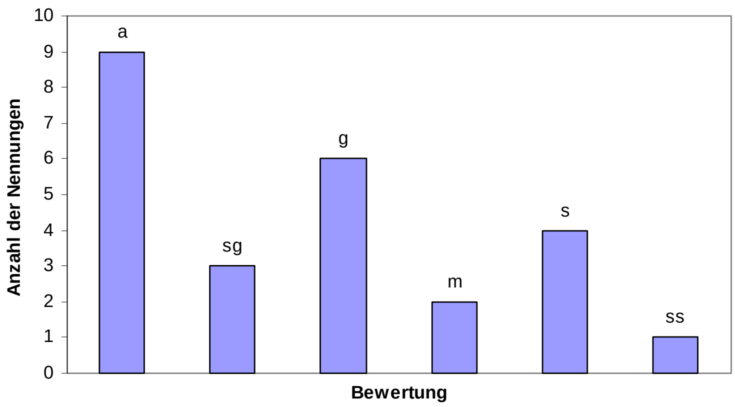
„Harry Potter und der Stein der Weisen“:
a, ss, s, s, s, a, a, sg, g, m, sg, g, a, a, g, g, m, sg, a, g, a, a, g, s, a

„Harry Potter und die Kammer des Schreckens“:
m, s, g, a, a, a, sg, g, a, g, m, m, g, g, sg, s, a, a, a, g, a, a, g, g, a

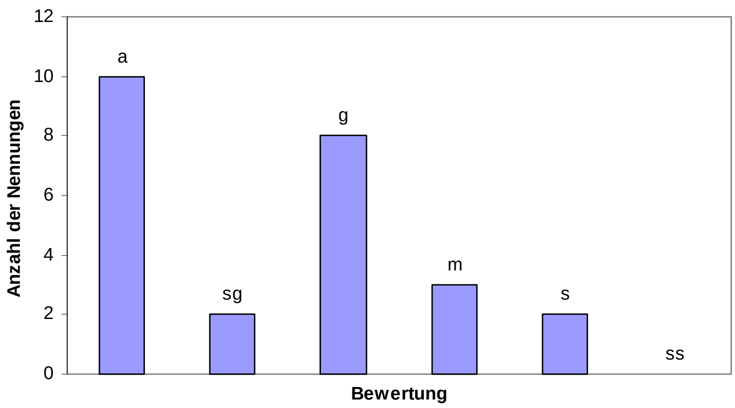
Welcher der beiden Filme hat den Schülerinnen und Schülern besser gefallen?
Bearbeitungshinweis: Welche Kenngrößen sind für die Auswertung geeignet?

Lösung:
Um die Bewertungsreihen miteinander vergleichen zu können, bietet es sich an, die zugehörigen Zentralwerte und Modalwerte zu bestimmen.

Bestimmung des Modalwerts: „Welche Bewertung kommt am häufigsten vor?“
Modalwert von „Harry Potter und der Stein der Weisen“ = a (9 Nennungen)



Modalwert von „Harry Potter und die Kammer des Schreckens“ = a (10 Nennungen)



Der Zentralwert lässt sich aus den geordneten Bewertungsreihen unmittelbar ablesen:

Zentralwert (Median) von „Harry Potter und der Stein der Weisen“ = g

<u>a a a a a a a a a sg sg sg</u> $\boxed{g}$ <u>g g g g g m m s s s s ss</u>

Zentralwert (Median) von „Harry Potter und die Kammer des Schreckens“ = g

<u>a a a a a a a a a a sg sg</u> $\boxed{g}$ <u>g g g g g g g m m m s s</u>

Obwohl beide Filme im Modalwert und im Zentralwert übereinstimmen, wurde der Film „Harry Potter und die Kammer des Schreckens“ besser bewertet (betrachte hierzu die geordneten Bewertungsreihen).

Dieser Sachverhalt lässt sich auch über die Berechnung des arithmetischen Mittels zeigen: Angenommen, die Bewertungen entsprechen Schulnoten, wobei gilt:

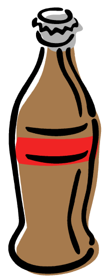
a = 1, sg = 2, g = 3, m = 4, s = 5 und ss = 6.

Dann folgt daraus mit der Formel für das arithmetische Mittel:

$$\overline{x}_{\text{Stein der Weisen}} = \frac{9\cdot 1+3\cdot 2+6\cdot 3+2\cdot 4+4\cdot 5+1\cdot 6}{25} = 2{,}68$$

$$\overline{x}_{\text{Kammer des Schreckens}} = \frac{10\cdot 1+2\cdot 2+8\cdot 3+3\cdot 4+2\cdot 5}{25} = 2{,}4$$

Der Film „Harry Potter und die Kammer des Schreckens“ wurde besser bewertet.



<u>Aufgabe 2:</u> Die Füllmenge einer 1,5-Liter-Cola-Flasche

Bei Getränken stimmen die angegebenen Füllmengen oft nicht genau. Deshalb möchte Coca-Cola seine Produktion überprüfen und testet 20 beliebige 1,5-Liter-Flaschen aus einer Palette, die 1.000 Flaschen beinhaltet.

Messergebnisse (alle Angaben in Liter):

1,51 1,49 1,57 1,50 1,53 1,50 1,48 1,46 1,52 1,54 1,50 1,49 1,50 1,48 1,55 1,53 1,53 1,50 1,51 1,50

a) Berechne die durchschnittliche Füllmenge, die mittlere Abweichung und gib die Spannweite der Füllmenge an! Ist das Ergebnis verbraucherfreundlich? Begründe deine Antwort!

b) Bestimme die Varianz und die Standardabweichung der gegebenen Datenmenge!

c) Gib bei vier 1,5-Liter-Cola-Flaschen mögliche Füllmengen (stets unterschiedlich) an, so dass die Standardabweichung ungefähr 0,1 Liter beträgt!

Beachte: Es können nicht alle Abweichungen positive Werte annehmen! Warum?

Lösung:

Zu (a) und (b): Die Daten lassen sich bequem in einer Tabelle darstellen, um dann die gesuchten Werte daraus zu berechnen:

gemessene Füllmenge in Liter	1,51	1,49	1,57	1,50	1,53	1,50	1,48	1,46	1,52	1,54
Mittelwert in Liter	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51
Abweichung	0	-0,02	0,06	-0,01	0,02	-0,01	-0,03	-0,05	0,01	0,03
$(Abweichung)^2$	0	0,0004	0,0036	0,0001	0,0004	0,0001	0,0009	0,0025	0,0001	0,0009

gemessene Füllmenge in Liter	1,50	1,49	1,50	1,48	1,55	1,53	1,53	1,50	1,51	1,50
Mittelwert in Liter	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51	1,51
Abweichung	-0,01	-0,02	-0,01	-0,03	0,04	0,02	0,02	-0,01	0	-0,01
$(Abweichung)^2$	0,0001	0,0004	0,0001	0,0009	0,0016	0,0004	0,0004	0,0001	0	0,0001

Daraus folgt:

$$\bar{x}_{Füllmenge} = \frac{1{,}51 + \ldots + 1{,}50}{20} = 1{,}5095 l \approx 1{,}51 l$$

$$\bar{x}_{Abweichung} = \frac{0 + 0{,}02 + \ldots + 0{,}01}{20} = \frac{0{,}41}{20} \approx 0{,}02\ l$$

$$\bar{x}_{(Abweichung)^2} = Varianz = s^2 = \frac{0 + \ldots + 0{,}0001}{20} = 0{,}000655 l \approx 0{,}0007 l$$

Für die Standardabweichung gilt: $s = \sqrt{0{,}000655 l} \approx 0{,}026 l$

Spannweite := (größter Wert) – (kleinster Wert) = 1,57 – 1,46 = 0,11 (Liter)

Das Ergebnis ist verbraucherfreundlich, denn die mittlere Füllmenge (1,51 Liter) liegt über dem auf der Flasche angegebenen Wert (1,50 Liter).

Eine mögliche Lösungsvariante zu (c):

Standardabweichung = s = 0,1 (Liter), Varianz = s² = 0,01

Die quadratischen Abweichungen $s = \sqrt{0{,}000655 l} \approx 0{,}026 l$ könnten wie folgt lauten: **[0 0,005 0,01 0,025]**

Denn [(0 + 0,005 + 0,01 + 0,025) / 4] = s² = 0,01 ist erfüllt.

Dann haben die Abweichungen selbst folgende Werte: **[0 -0,071 - 0,1 +0,158]**

Denn es gilt: $\sqrt{0} = 0,\ \sqrt{0{,}005} = 0{,}071,\ \sqrt{0{,}01} = 0{,}1\ und\ \sqrt{0{,}025} = 0{,}158$

Die Vorzeichen müssen variieren, damit der geforderte Mittelwert von (1,5) erhalten bleibt!

Die Füllmengen der vier Flaschen ergeben sich dann zu **[1,50 1,429 1,40 1,658]**

Damit bleibt der Mittelwert von 1,5 fast unverändert erhalten:

$$\bar{x} = \frac{1{,}50 l + \ldots + 1{,}658 l}{4} = 1{,}49675 l \approx 1{,}5 l$$

<u>Aufgabe 3:</u> Arithmetisches Mittel, Modalwert und Zentralwert

Beschreibe in eigenen Worten den Unterschied zwischen den drei mathematischen Begriffne „arithmetisches Mittel“, „Modalwert“ und „Zentralwert“ und finde dazu ein passendes Beispiel, an dem diese Unterschiede deutlich werden!

Lösung:

„arithmetisches Mittel“: Berechnung: $\bar{X} = \frac{\text{Summe aller Einzelwerte}}{\text{Anzahl aller Einzelwerte}}$

= Mittelwert einer Messreihe = Durchschnittswert

„Modalwert“: Wert, der am häufigsten in einer Messreihe auftritt

„Zentralwert“ (Median): Wird eine Messreihe in aufsteigender Reihenfolge angeordnet, so ist der Zentralwert der Wert, der in der Mitte der Messreihe steht.

Beispiel 1: Einkommen der Bevölkerung in Afrika

Das Durchschnittseinkommen der Bevölkerung in Afrika ist viel höher als der Median und der Modalwert des Einkommens. Diese beiden Größen spiegeln jedoch einen viel größeren Anteil der Bevölkerung wider.

Beispiel 2: Bill Gates zieht in ein kleines Bauerndorf

Das Durchschnittseinkommen der Bewohner (arithmetisches Mittel) wird exorbitant ansteigen, obwohl die Bauern nicht unmittelbar von Bill Gates’ Reichtümern profitieren. Modalwert und Zentralwert bleiben jedoch unverändert, entsprechen weiterhin ungefähr dem bisherigen Einkommen eines Bauern und beschreiben die Situation im Bergdorf deswegen angemessener.

<u>Aufgabe 4:</u> Eheschließungen in der BRD

Die beiden Tabellen des Statistischen Bundesamts zeigen die Zahl der Eheschließungen in Deutschland bzw. die Zahl der Ehescheidungen je 10.000 Ehen in West / Ost auf:

Ehescheidungen

Je 10000 Ehen

	West	Ost
2000	105[1)]	89[1)]
1999	101,8	85,9
1998	105,7	85,7
1997	103,7	77,5
1996	95,2	65,8
1995	92,3	61,5
1994	90,6	59,4
1993	87,3	48,3
1992	79,7	25,1
1991	81,9	22,1
1990	81,1	78,4

1) gerundet; Quelle: Statistisches Bundesamt (Wiesbaden), **www.destatis.de**

Eheschließungen in Deutschland

Jahr	Zahl
2001	389000[1)]
2000	418550
1999	430674
1998	417420
1997	422776
1996	427297
1995	430534
1994	440244
1993	442605
1992	452428
1991	454291

1) vorläufige Zahl; Quelle: Statistisches Bundesamt (Wiesbaden), **www.destatis.de**

a) Bestimme das arithmetische Mittel, den Modalwert und den Zentralwert sowohl von den Eheschließungen als auch von den Ehescheidungen (West, Ost und gesamt)! Was fällt dir an den Ergebnissen auf?

b) Welche Veranschaulichungsmöglichkeiten für solch einen tabellarischen Zusammenhang hast du bereits kennen gelernt? Wähle zwei davon aus und realisiere sie!

Zusatzfrage: Welche Visualisierungsform ist in diesem Fall besonders geeignet bzw. ungeeignet?

Lösung:

Zu (a)

Arithmetisches Mittel:

$$\bar{x}_{Eheschließungen} = \frac{389.000 + 418.550 + \ldots + 454.291}{11} = 429.619{,}9091 \approx 429.620$$

$$\bar{x}_{Ehescheidungen,\ West} = \frac{105 + 101{,}8 + \ldots + 81{,}1}{11} = 93{,}12 \approx 93 \qquad \text{je 10.000 Ehen}$$

$$\bar{x}_{Ehescheidungen,\ Ost} = \frac{89 + 85{,}9 + \ldots + 78{,}4}{11} = 63{,}52 \approx 64 \qquad \text{je 10.000 Ehen}$$

Modalwert:

Der Modalwert der Eheschließungen in Deutschland und Ehescheidungen je 10.000 Ehen (sowohl West als auch Ost) existiert nicht, denn jeder Wert kommt nur ein einziges Mal vor.

→ Kein Wert der Datenreihe ist ein Modalwert!

Zentralwert:

$$Zentralwert_{Eheschließungen} = 430.534$$

$$Zentralwert_{Ehescheidungen,\ West} = 92{,}3 \qquad \text{je 10.000 Ehen}$$

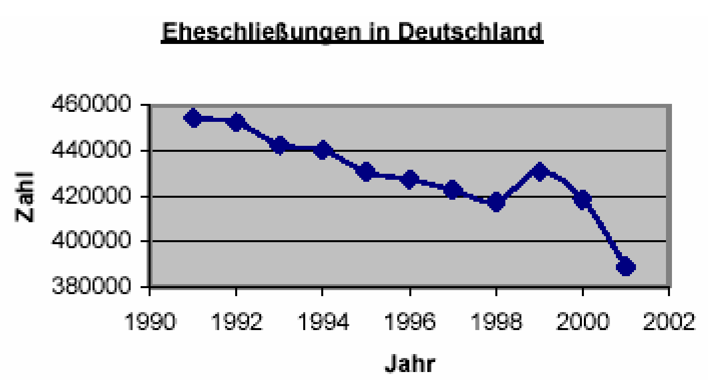
$$Zentralwert_{Ehescheidungen,\ Ost} = 65{,}8 \qquad \text{je 10.000 Ehen}$$

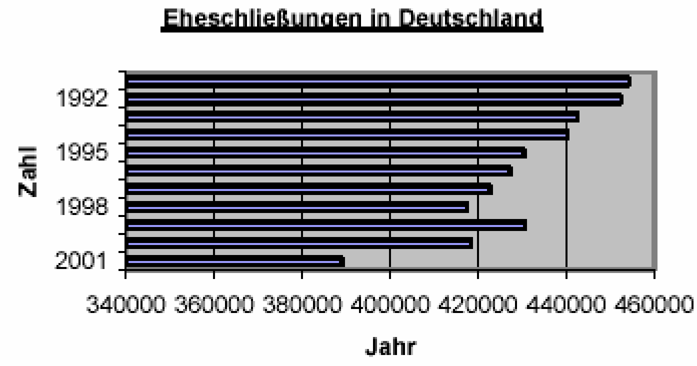
Das arithmetische Mittel entspricht in diesem Zusammenhang ungefähr dem Zentralwert der Datenmenge sowohl bei den Eheschließungen als auch bei den Ehescheidungen in Ost und West!

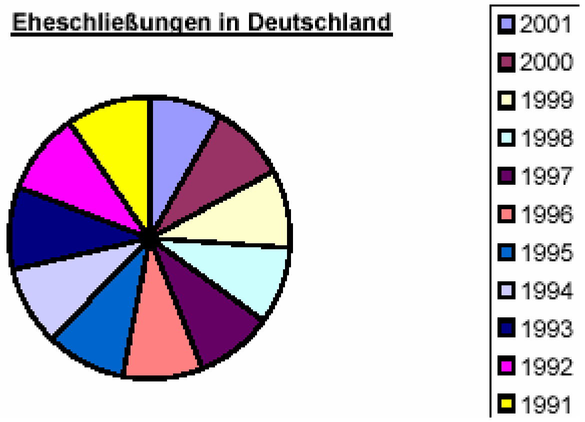
Zu (b):

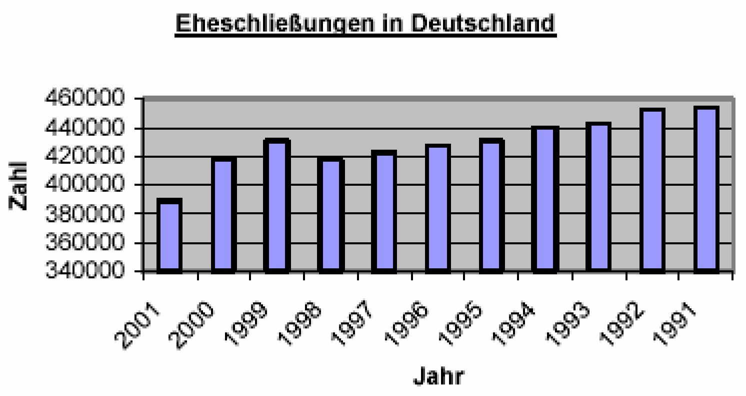
- Graph
- Streifendiagramm
- Kreisdiagramm
- Säulendiagramm
- Stabdiagramm
- Flächen und Volumina
- Piktogramm

<u>Beispiele für mögliche Darstellungsformen:</u>









Zusatzfrage:

- besonders geeignete Darstellungsformen für diesen Zusammenhang: Graph, Streifendiagramm, Säulendiagramm und Stabdiagramm
- besonders ungeeignete Darstellungsform für diesen Zusammenhang: Kreisdiagramm

Begründung: Die wichtigsten Informationen sollen der Graphik unmittelbar entnommen werden können. Dies ist in diesem Fall beim Kreisdiagramm nicht möglich.