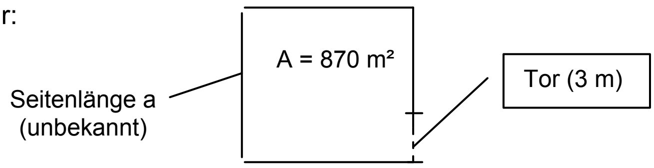
Aufgabe 1: Der Weidezaun

Eine quadratische Viehweide mit der Fläche 870 m² soll eingezäunt werden. Dabei sollen 3 m für ein Tor freigelassen werden.
Wie viel Meter Zaun werden benötigt?

Lösung:

Informative Figur:



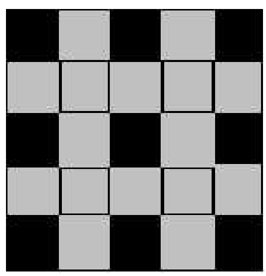
Um die Länge des Zaunes zu bestimmen, wird der Umfang der Viehweide benötigt. Für den Umfang U in Abhängigkeit der Seitenlänge a des Quadrates gilt die Formel $U = 4a$. Ist einem Schüler diese Formel nicht mehr bekannt, kann eine informative Figur weiterhelfen. Die Seitenlänge a ergibt sich als Quadratwurzel aus der Fläche zu 29,5 m (gerundet auf 0,1 m), die benötigte Zaunlänge ergibt sich also zu $4 \cdot 29{,}5\text{ m} - 3\text{ m} = 115\text{ m}$.

Beim Auffinden des Lösungsweges kann die Strategie des Rückwärtsarbeitens helfen: Um die Zaunlänge zu bestimmen, wird der Umfang benötigt. Dieser lässt sich nicht direkt bestimmen. Die Seitenlänge müsste bekannt sein. Diese wiederum kann aus den gegebenen Daten bestimmt werden.

Verwendungsvorschlag für diese Aufgabe:

An dieser Aufgabe kann gerade leistungsschwächeren Schülern der Nutzen der Strategie Rückwärtsarbeiten verdeutlicht werden. Bei der Verwendung als Beispielaufgabe ist jedoch zu beachten, dass viele Schüler diese Aufgabe möglicherweise ohne die bewusste Verwendung heuristischer Methoden lösen. Um trotzdem allen Schülern den Nutzen dieser Methoden deutlich zu machen, müssen Beispiele verschiedenen Schwierigkeitsgrades gewählt werden. Einerseits sind leichtere Aufgaben geeignet, da sie von den meisten Schülern gelöst werden können. Andererseits wird stärkeren Schülern hier kaum der Nutzen von heuristischen Verfahren und Strategien deutlich, da sie solche Aufgaben meist auch ohne diese Strategien schnell lösen. Umgekehrt sind schwierigere Aufgaben zwar besser geeignet, um auch stärkeren Schülerinnen und Schülern den Nutzen der Heuristiken zu verdeutlichen, es besteht dann jedoch die Gefahr, dass schwächere Schüler überfordert werden und der Lernerfolg bei ihnen ausbleibt.

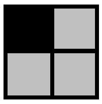
Aufgabe 2: Quadratmosaik



1024 schwarze, quadratische Mosaiksteinchen sind zu einem großen Quadrat angeordnet. Nun soll zwischen je zwei schwarzen Steinchen ein hellgraues Steinchen gelegt werden; die Zeichnung zeigt einen Ausschnitt. Wie viele hellgraue Steinchen werden benötigt?

Lösung:

Bei dieser Aufgabe gibt es mehrere Lösungsansätze. Folgt man dem Invarianzprinzip, so könnte man versuchen, sich Invarianten zu konstruieren, z.B. die Anzahl der hellgrauen Steinchen, die jeweils auf ein schwarzes Steinchen kommen. Dieser Überlegung liegt eine Zerlegung der Ausgangsfigur in Teilfiguren zugrunde, wie in folgender Zeichnung gezeigt:



Auf ein schwarzes Steinchen kommen drei hellgraue Steinchen. Dies ist aber nur für einen Teil der Figur richtig, nicht jedoch für die schwarzen Steinchen am unteren und rechten Rand. Dass die Randeffekte extra zu berücksichtigen sind, verkompliziert die Rechnung.

Die Suche nach anderen Invarianten führt auf die Anzahl der Steinchen pro Reihe, die identisch ist mit der Anzahl der Reihen. Bei diesem zweiten Lösungsansatz geht es darum, die Anzahl der Steinchen pro Reihe zu bestimmen. Daraus kann die Gesamtzahl aller Steinchen bestimmt werden; aus dieser wiederum ergibt sich durch Differenzenbildung die Anzahl der hellgrauen Steinchen.

Beide Lösungsideen erweisen sich als brauchbar; die zweite ist jedoch etwas eleganter und einfacher.

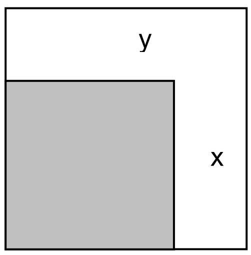
Berechnung der Lösung mit der zweiten Lösungsidee:

Als erstes berechnet man die Anzahl der schwarzen Quadrate in einer Reihe: Diese ergibt sich als Quadratwurzel aus 1024 zu 32. Nun kann die Anzahl der insgesamt vorhandenen Quadrate berechnet werden: in einer Zeile beziehungsweise Reihe liegen 32 + 31 = 63 Quadrate, also sind es insgesamt $63^2 = 3969$ kleine Quadrate. Davon sind 3969 – 1024 = 2945 Quadrate hellgrau.

Das gleiche Ergebnis erhält man auch mit der ersten Lösungsidee:

Auf jedes schwarze Steinchen kommen drei hellgraue Steinchen, das macht 3 • 1024 = 3.072. Davon muss eine Reihe rechts und eine Reihe unten abgezogen werden: Man muss - ähnlich wie oben - die (hier allerdings größere) Anzahl der Steinchen pro Reihe bestimmen: es sind genau 64. Da man das Steinchen rechts unten, welches zur rechten und zur unteren abzuziehenden Reihe gehört, doppelt gezählt, muss 1 abgezogen werden, es sind daher 2 • 64 – 1 = 127 Steinchen. Die Anzahl der hellgrauen Quadrate beträgt demnach 3.072 – 127 = 2945.

<u>Aufgabe 3:</u> Eindeutigkeit der Quadratwurzel



Die Zeichnung zeigt: Wenn $0 \le x < y$, dann ist $x^2 < y^2$. Verwende dies, um folgende Aussage zu beweisen: Ist $a \ge 0$, so gibt es höchstens eine nicht negative Zahl x mit $x = \sqrt{a}$.

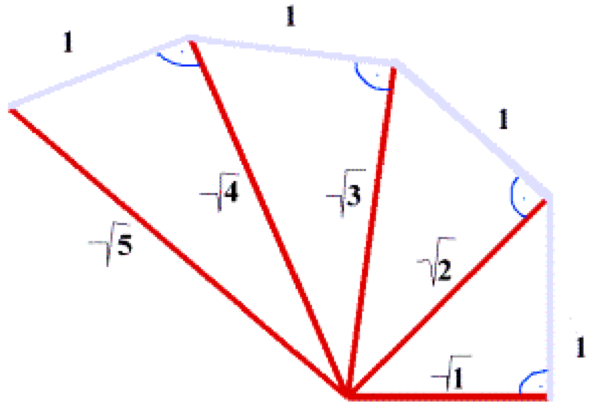
Lösung:

Widerspruchsbeweis: Angenommen, es gibt zwei unterschiedliche, nicht negative Zahlen x_1 und x_2 mit $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = \sqrt{a}$. Es gilt also nach Definition der Quadratwurzel $x_1^2 = a$ und $x_2^2 = a$. Sei x_1 die kleinere der beiden Zahlen. Dann gilt $0 < x_1 < x_2$. Also gilt $x_1^2 < x_2^2$ und damit a < a. Ein Widerspruch, also ist die Annahme falsch. Es kann also höchstens eine nicht negative Zahl x geben mit $x = \sqrt{a}$.

<u>Verwendungsvorschlag für die Aufgabe:</u>
Diese Aufgabe ist ein Beispiel für zahlreiche mögliche Begründungsaufgaben, die im Rahmen des Themas „Quadratwurzeln und reelle Zahlen“ gestellt werden können. Ausgehend von der durch die informative Figur plausibel gemachten Beziehung kann mit einem relativ einfachen Widerspruchsbeweis die Eindeutigkeit der Quadratwurzel gezeigt werden.

<u>Aufgabe 4:</u> Die Wurzelspirale

Die dargestellte Zeichnung zeigt die so genannte Wurzelschnecke oder Wurzelspirale. Zeichne die Wurzelschnecke in dein Heft und beschreibe ihre Konstruktion.



Zusatzfrage: Wo treten Spiralen in der Natur, in der Technik, im Alltag und in der Kunst auf?

Lösung:
Konstruktionsbeschreibung: Die Wurzelspirale wird durch das Aneinanderreihen rechtwinkliger Dreiecke konstruiert. Dabei ist die Hypotenuse des vorherigen Dreieckes die Ankathete des nachfolgenden. Die Gegenkathete hat in all diesen Dreiecken stets die Länge 1.

Vorkommen von Spiralen:
• Schneckengehäuse
• Pflanzen (Samenkapseln, Ranken, Blätter können spiralförmig angeordnet sein) Bsp.: Sonnenblume
• Elefanten winden ihren Rüssel spiralförmig
• Spinnen bauen ihr Nest spiralförmig
• Nabelschnur eines Neugeborenen
• Haarwirbel
• der Fingerabdruck enthält spiralförmige Muster
• die Schnecke im Innenohr ist spiralförmig
• Wasserstrudel
• Ablaufstrudel in der Badewanne
• Luftströmungen um ein Tiefdruckgebiet

Aufgabe 5: Geometrisches Wurzelziehen (PC-Einsatz möglich)

Die Fenster von alten gotischen Kirchen sind geometrisch aufwendig gestaltet. Die Baumeister benötigten mathematische Fähigkeiten, um die komplexen Strukturen in den Fenstern gestalten zu können und verfügten daher über ein beeindruckendes mathematisches Wissen. Unter anderem kannten sie ein Verfahren, um die Quadratwurzel einer Zahl mit rein geometrischen Mitteln zu bestimmen:

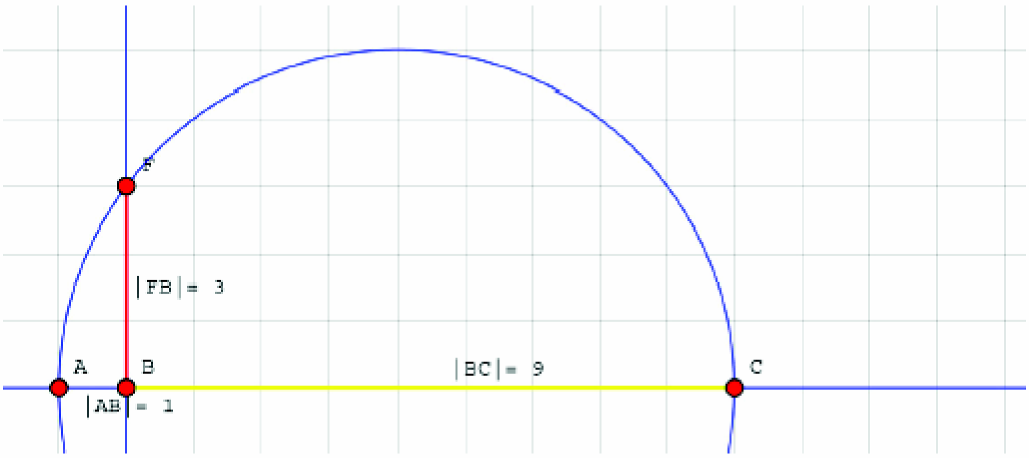
Wenn man über einer Strecke einen Halbkreis zeichnet und darauf einen Punkt wählt, erhält man ein rechtwinkliges Dreieck. Nach dem Höhensatz gilt für dieses Dreieck $h^2 = p \cdot q$, wobei h die Höhe des Dreiecks ist, die den Durchmesser des Kreises in die zwei Teile p und q teilt. Wählt man p = 1, erhält man $h^2 = q$ und somit ein einfaches Verfahren zur Quadratwurzelbestimmung! Bestimme mit diesem Verfahren zeichnerisch die Quadratwurzel von 9, 4 und 5!

Hinweis: Für das Konstruktionsverfahren bietet sich die Verwendung von dynamischer Geometriesoftware an. Unter der angegebenen Internetadresse finden Sie ein Java-Applet zu dem Verfahren: http://home.arcor.de/jan_schuster/kirchenfenster/

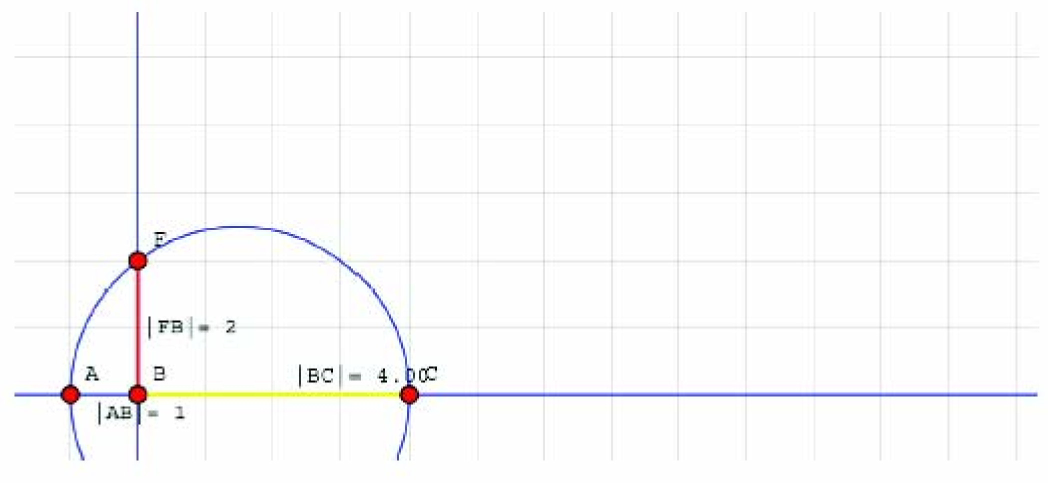
Lösung:

Die Lösungen sind in den folgenden Bildern dargestellt. Wenn die Schüler die Aufgabe nicht am Computer bearbeiten, sollte die Frage nach der Genauigkeit der erhaltenen Lösungen bei der Aufgabenbesprechung kurz mitdiskutiert werden.

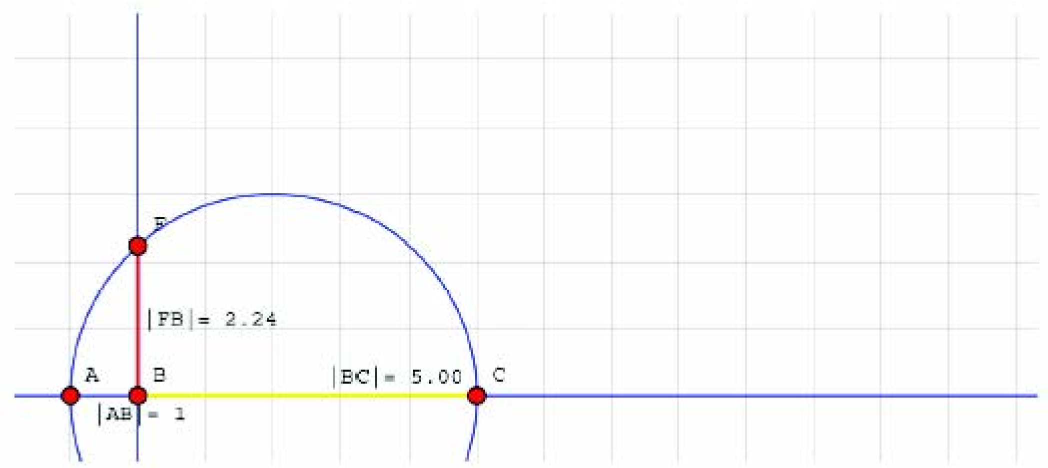
Quadratwurzel von 9 = 3:



Quadratwurzel von 4 = 2:



Quadratwurzel von 5 ≈ 2,24:



Eine Überprüfung mit dem Taschenrechner ergibt: $\sqrt{5} \approx 2,236067978$.